

УДК 681.7.068

**А.В. Немыкин, Д.А. Шапиро**Институт автоматизации и электрометрии Сибирского отделения РАН,  
Новосибирск, Россия**ФАЗОВАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПИКОВОЙ АМПЛИТУДЫ  
СУММЫ ГАРМОНИК**

Представлен наиболее эффективный на данный момент алгоритм решения задачи минимакса применительно к конечной сумме комплексно-значных гармоник с одинаковыми амплитудами, эквидистантно отстоящими друг от друга частотами. Подход основан на переборе корней разложения амплитудной функции на множители для получения оптимальной фазовой функции и дальнейшей оптимизации алгоритмом Гершберга–Сакстона. Приведено сравнение результатов с наилучшими из описанных ранее. Отмечены главные особенности алгоритма, позволяющие за ограниченное число итераций достигать глобального минимума задачи оптимизации. Также в работе представлены графики решенных задач минимакса, оптимумы которых оказались лучше отмеченных ранее в литературе.

**Ключевые слова:** фазовая оптимизация, пиковая амплитуда, сумма гармоник, многочастотный фильтр, поиск минимакса.

**A.V. Nemykin, D.A. Shapiro**Institute of Automation and Electrometry of the Siberian Branch  
of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation**CREST FACTOR MINIMIZATION  
OF THE MULTITONE COMPLEX SIGNAL**

In this paper we present the most effective algorithm for a crest factor minimization of multitone complex signals. The approach includes complex root selection of the amplitude function for the phase function rebuilding and then Gerchberg-Saxton algorithm application for a fine phase tuning. Phase optimization of a finite sum is fulfilled in case of the complex harmonics with equal amplitudes and equispaced frequencies. We compare our results with the earlier calculated best ones and remark its superiority. The main features of the approach are highlighted to underline the stability and performance capabilities for the global minimum achievement. Finally, we introduce some amplitude functions of multitone signals with lower crest factor than previously reported in the literature.

**Keywords:** crest factor minimization, phase tuning, peak amplitude, multitone signal, multitone filter, minimax problem.

## Введение

Задачи оптимизации возникают повсеместно, что зачастую является следствием ограниченности ресурсов или физических параметров используемых узлов. В частности, одной из таких задач является минимизация пиковой амплитуды многочастотной функции [1], которая, например, возникает при создании широкополосных волоконных брэгговских решеток (ВБР) для перестраиваемых лазеров [2] или в линиях связи со спектральным уплотнением каналов для компенсации дисперсии [3], либо для быстрой проверки работоспособности интегральных схем на разных частотах, когда на вход устройства подается синтезированный широкополосный сигнал, не превышающий допустимое амплитудное значение [4]. Касательно ВБР суть проблемы в том, что в один и тот же участок волокна записываются профили нескольких решеток с близкими друг другу периодами, и может случиться так, что локально требуемое итоговое отклонение показателя преломления (ПП) превысит технические возможности записи. В таком случае запись профилей можно осуществить с небольшой разбежкой по координате в пределах одного периода, что на групповую задержку не повлияет, но уменьшит пиковое значение итогового профиля [5].

В данной работе приводится алгоритм дискретных преобразований, позволяющий за конечное время повторять, а в некоторых случаях и превосходить, уже известные значения задачи минимакса. На первом этапе оптимизации специальным нулевым приближением определяется функция амплитуды функционала  $S$ , и методом перебора из  $2^{N-2}$  реализаций устанавливается знак мнимой части комплекснозначных корней из разложения рассматриваемого функционала на множители, при которых образующие функционал гармоники имеют максимально близкую к единице амплитуду. Затем во втором этапе оптимизации реализуется алгоритм Гершберга–Сакстона [6], при этом в координатном представлении срезаются максимумы модуля функционала  $S$  по плавно понижающемуся уровню, а в спектральном представлении обрезаются высокочастотные гармоники и принимаются за единицу амплитуды оставшихся с сохранением их фазы.

## Постановка задачи

При записи нескольких ВБР внутри одного и того же объема оптического волокна возникает проблема с ограниченным значением вариации ПП сердцевины, обычно порядка  $10^{-4}$ . Чтобы уложиться

в техническое ограничение, но при этом иметь возможность записи решеток с достаточно глубокой модуляцией ПП для сохранения их эффективности, нужно тщательно подбирать взаимные фазы записываемых профилей, чтобы суммарное отклонение ПП не выходило за пределы возможного к реализации с требуемой точностью. Ограничение амплитуды вариации ПП записываемой решетки через уравнения связанных мод и потенциал взаимодействия сводится к минимизации максимума модуля функционала:

$$S(x, \varphi_1, \dots, \varphi_N) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{inx+i\varphi_n} \quad (1)$$

на множестве нормированной координаты  $x$  посредством подбора вещественных параметров  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ . Здесь подразумевается, что требуемые к записи амплитуды ПП всех  $N$  записываемых профилей ВБР одинаковы, а их резонансные частоты эквидистантны.

Процедура оптимизации заключается в поиске абсолютного максимума модуля функционала (1) на всем интервале вещественной переменной  $x$ , после чего выполняется вариация фазовых значений  $\varphi_n$  с целью уменьшения этого абсолютного максимума. Стоит отметить, что общая фаза функционала, как и точка начала отсчета по переменной  $x$ , не влияет на значение максимума его модуля, следовательно, размерность вариационного пространства можно уменьшить на два непрерывных параметра. Для удобства в дальнейшем мы примем фазы крайних гармоник равными нулю  $\varphi_1 = \varphi_N = 0$ . Так как функционал  $2\pi$  периодичен по всем переменным, то для поиска абсолютного максимума достаточно исследовать функцию на интервале  $[0, 2\pi]$  по аргументу  $x$ :

$$R_{\text{Max}} = \min_{\vec{\varphi} \in R^N} \max_{x \in [0, 2\pi]} |S(x; \vec{\varphi})| \geq \sqrt{1 + 2/N}. \quad (2)$$

Полученное значение  $R_{\text{Max}}$  является искомым наряду с массивом значений  $\varphi_n$ . Также существует ограничивающее его снизу значение, стремящееся к единице с ростом числа  $N$ , которое проистекает из равенства единице амплитуд гармоник. Доказательство этого неравенства из-за некоторой громоздкости мы опустим.

Попытки решать данную задачу градиентными алгоритмами занимают крайне много времени из-за специфики топологии [7] и большого количества локальных минимумов.

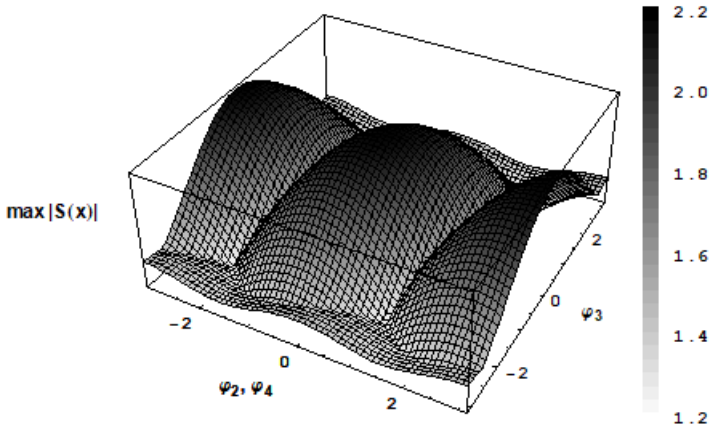


Рис. 1. Гиперповерхность, образованная максимумами модуля функционала при различных значениях фаз, для симметричного случая оптимизации суммы из пяти гармоник

В частности, на рис. 1 представлена гиперповерхность из максимумов модуля функционала  $S$ , образованная двумя варьируемыми параметрами (фазами), для симметричного по  $x$  случая оптимизации пяти гармоник, в котором фазы  $\varphi_2$  и  $\varphi_4$  совпадают. Изрезанность профиля глубокими и бесконечно узкими каньонами подразумевает старт градиентного алгоритма с каждого из гладких участков всего многообразия. Поэтому, чтобы повторить или превзойти даже с  $N < 20$  известные в литературе результаты [5, 6], приходится вводить фактор случайности при выборе точки старта и выполнять сотни реализаций без гарантий на успех.

### Начальное приближение

Первая идея – сделать перебор гладких многообразий гиперповерхности не вероятностным, а упорядоченным, для чего воспользуемся определенным представлением решения в виде разложенного на множители полинома по степеням  $e^{ix}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{inx+i\varphi_n} = \frac{e^{ix+i\varphi_N}}{\sqrt{N}} \prod_{k=1}^{N-1} (e^{ix} - e^{i\varphi_k}). \quad (3)$$

Такое представление существует всегда согласно основной теореме алгебры. Здесь за  $\psi_k$  обозначены комплекснозначные корни многочлена. Если какой-то  $\psi_n$  оказывается вещественным, то функционал  $S$  обращается в ноль при значении аргумента  $x = \text{Re} \psi_n$ . Вариации значений  $\psi_k$  в ходе оптимизации должны непременно приводить к уменьшению мнимой части  $\varphi_n$ . Возведение суммы (3) по модулю в квадрат удваивает количество комплекснозначных корней, при этом для каждого отдельного корня  $\psi_k$  возникает комплиментарный ему  $\psi_k^*$ , полученный сопряжением:

$$|S(x; \bar{\varphi})|^2 = \frac{1}{N} \prod_{k=1}^{N-1} |e^{ix} - e^{i\psi_k}|^2 = \frac{4^{N-1}}{N} \prod_{k=1}^{N-1} e^{\frac{i(\psi_k - \psi_k^*)}{2}} \left| \sin \frac{x - \psi_k}{2} \right|^2. \quad (4)$$

Итоговый полином обладает симметрией ряда по степеням, попадающим в диапазон от  $-N + 1$  до  $N - 1$ , при этом положительно определен на множестве вещественных значений аргумента  $x$ , а количество его корней четно и соответствует числу  $2N - 2$ . Здесь мы специально представили результат произведением через квадрат модуля тригонометрической функции, который остается инвариантным при замене  $\psi_k \leftrightarrow \psi_k^*$ . Если мы хотим уменьшить максимальное значение функционала, то нам необходимо потребовать стремление к нулю хотя бы одного из множителей на каждом участке периода аргумента  $x$ . В таком случае в качестве корней полинома выберем  $\psi_k$  с эквидистантно расположенной вещественной частью, чтобы все множители были эквивалентными между собой, при этом мнимая часть должна быть минимальной по модулю, но в то же время сохранять нормировку функционала  $S$ . Можно привести иные рассуждения, чтобы мнимая часть была максимальна по модулю, тогда тригонометрические множители будут квазипостоянными, что увеличит фактор заполнения функционала и приведет к набору интеграла нормировки при меньших максимумах амплитуды.

Обе вариации рассуждений приведут к одному итогу: при взятии эквидистантных вещественных частей и выборе постоянной по модулю мнимой части  $\psi_k$  для одной половины корней, но меняющей знак на противоположный для оставшейся половины, удастся добиться наиболее оптимального (в случае нечетного числа каналов) амплитудного профиля для данного представления с выполнением соответствующего свойства:

$$\Psi_k = \frac{2\pi k}{N-1} + i\alpha \operatorname{sign}\left(k - \frac{N}{2}\right) \Rightarrow \prod_{k=1}^{N-1} e^{i \frac{\Psi_k - \Psi_k^*}{2}} = 1. \quad (5)$$

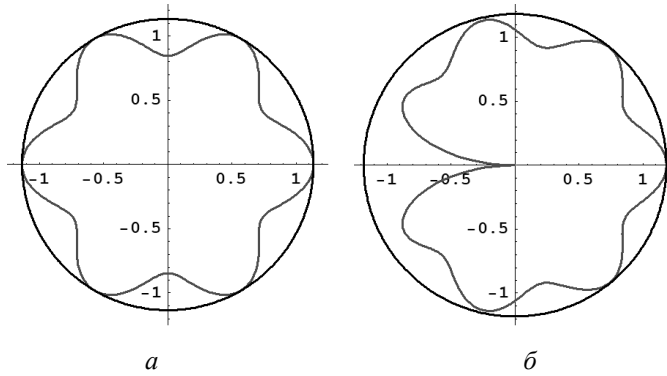


Рис. 2. Амплитуда начального приближения функционала  $S$  и ограничивающая ее окружность в полярных координатах от  $x$  для 7 каналов ( $a$ ) и 8 каналов ( $b$ )

Доказательство данного утверждения мы опустим. Отметим только, что если количество корней нечетно, то один из них будет иметь нулевую мнимую часть. Коэффициент  $\alpha$  находится из нормировки функционала  $S$ :

$$\alpha : \frac{4^{N-1}}{N} \prod_{k=1}^{N-1} \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{x - \Psi_k}{2} \right|^2 \frac{dx}{2\pi} = 1. \quad (6)$$

На рис. 2 в качестве примера представлены профили начального приближения амплитуд функционала, построенные вышеупомянутым образом, для некоторого числа каналов оптимизации. Для нечетного числа каналов амплитуда максимумов получается строго равной теоретическому пределу  $\sqrt{1 + 2/N}$ , для четного же числа за счет обращения в ноль мнимой части одного из корней она получается чуть больше. В частности, для восьми каналов, указанных на рисунке, максимум выше на 5,7 % относительно теоретического предела.

### Алгоритм дискретных преобразований

В предыдущем подразделе в качестве начального мы получили амплитудный профиль функционала  $S$ , построенный на представлении разложенного на множители полинома с выполнением условия нормировки на среднеквадратичную постоянную составляющую. Стоит

отметить, что хотя амплитудный профиль и оптимален применительно к представлению, он не может быть получен путем взятия модуля от сложения гармоник с равными между собой амплитудами. Тем не менее мы можем приблизить его к таковому, для чего будем выполнять определенные преобразования, которые не влияют на амплитудную часть функции, но влияют на фазу функционала  $S$ , вследствие чего Фурье-преобразование получаемой функции будет приводить к более равномерному амплитудному спектру интересующих нас гармоник. Такими преобразованиями являются парные перестановки мнимых частей с различными знаками у коэффициентов  $\psi_k$ :

$$\begin{cases} \psi_m \rightarrow \psi_m^*, \\ \psi_n \rightarrow \psi_n^*, \end{cases} \text{ где } m < \frac{N}{2} < n. \quad (7)$$

Иначе говоря, мы решаем, какой из множителей квадрата модуля функционала отнести к самому функционалу, а какой – к его сопряженному двойнику. В частности, при оптимизации задачи с  $N = 7$  транспозиция  $(010 | 100)$  означает  $\psi_2 \rightarrow \psi_2^*$  и  $\psi_4 \rightarrow \psi_4^*$ , как обозначено на рис. 3.

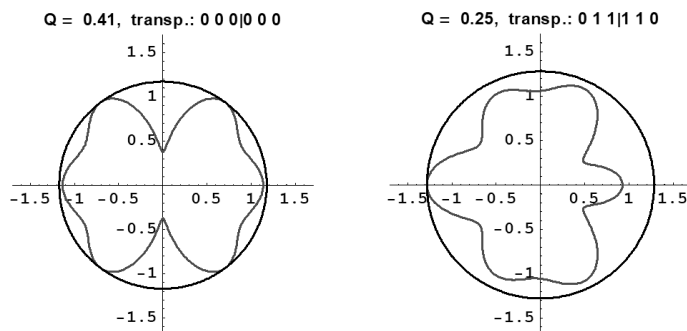


Рис. 3. Эволюция профиля амплитуды функционала  $S$  для 7 каналов при реализации серии сопряжений параметра  $\psi_k$

Вертикальная черта в средней позиции для четного числа каналов обозначает осевую симметрию начального распределения. В формуле (5) в этой точке меняется значение функции  $\text{sign}$ . В случае нечетного числа каналов в центре транспозиции ставятся две вертикальные черты. Таким образом, произведение от перестановки множителей не меняется, как и не меняется по этой причине амплитуда, но меняется фазовая функция функционала  $S$ .

Для понимания успешности той или иной перестановки применительно к исходной задаче введем дополнительный функционал  $Q$ , который, по сути, является стандартным отклонением от нуля мнимой части вариационных фаз. Мнимая часть фазы гармоник в представлении (3) отвечает за изменение амплитуды этой гармоник относительно единицы, поэтому требование устремления ее к нулю в процессе оптимизации необходимо и достаточно:

$$Q = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\text{Im} \varphi_n)^2}. \quad (8)$$

Итоговый алгоритм перебора знаков мнимых частей у параметров  $\psi_k$ , образующих корни функционала  $S$ , состоит в следующей последовательности. Вычисляем начальный параметр  $Q$ , для чего выполняем преобразование Фурье начального функционала  $S$  и пересчитываем полученные амплитуды коэффициентов в мнимую часть фаз гармоник. Теперь, когда есть начальное значение функционала  $Q$ , реализуем одну перестановку из всего множества. После чего повторяем расчет мнимых частей фаз гармоник и сравниваем новое значение  $Q$  с предыдущим. Если новое значение  $Q$  оказалось меньше, то полученные вещественные части фаз будем считать более оптимальными, как это и показано на рис. 4.

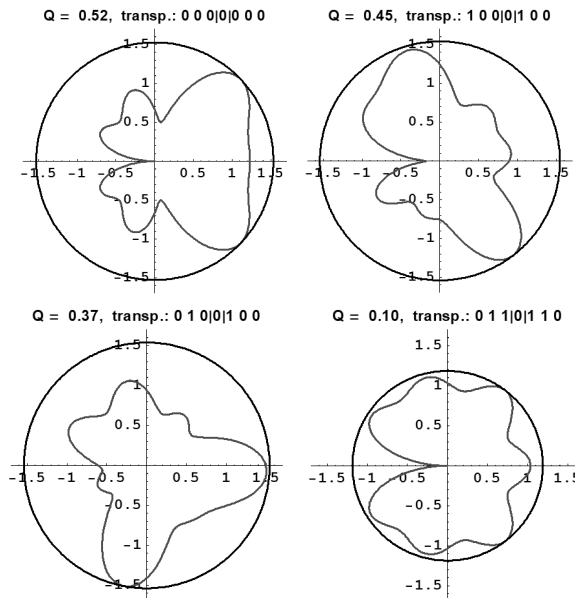


Рис. 4. Эволюция профиля амплитуды функционала  $S$  для 8 каналов при реализации серии сопряжений параметра  $\psi_k$



Прделаем эту операцию до полного перебора всего множества перестановок. На рис. 3 и 4 приведены амплитуды функционала  $S$ , построенного на вещественных частях фаз, рассчитанных для каждой из перестановок с приведением значения функционала  $Q$ .

### Алгоритм Гершберга–Сакстона

Как можно заметить, нет монотонной зависимости между абсолютным максимумом модуля функционала  $S$  и значением функционала  $Q$ , когда оно достаточно велико (см. рис. 3). По этой причине приходится подвергать дальнейшей оптимизации функционал  $S$ , отвечающий большим значениям  $Q$ , наравне с меньшим, если лучшее значение  $Q$  недостаточно мало. В данном случае таковым примером является решение задачи оптимизации для 7 гармоник (рис. 5, 6).

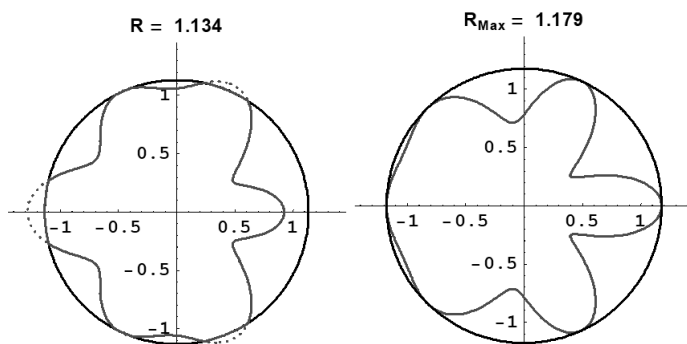


Рис. 5. Минимизация функционала  $S$  для 7 каналов алгоритмом Гершберга–Сакстона, полученного перестановкой (011|110)

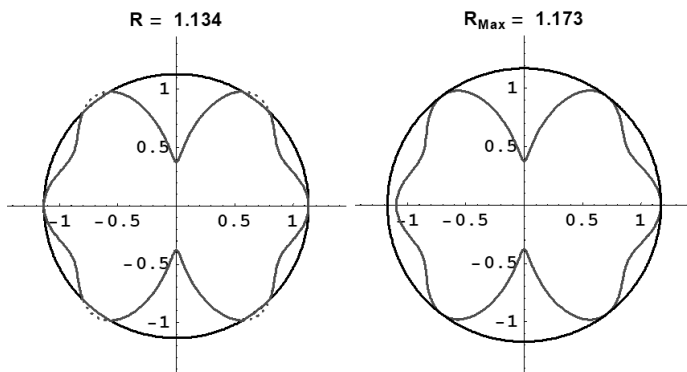


Рис. 6. Минимизация функционала  $S$  для 7 каналов алгоритмом Гершберга–Сакстона, полученного перестановкой (000|000)

Для окончательной минимизации максимума модуля функционала  $S$  пользуемся весьма известным в области голографии алгоритмом Гершберга–Сакстона [6], который не является градиентным и применяется для создания, например, исключительно амплитудных или фазовых масок. Применительно к нашей задаче мы стараемся уменьшить амплитуду функционала  $S$ , сохранив фазы  $\varphi_n$  вещественными. Для этого слегка подрезаем текущий максимум функционала с сохранением его фазы и делаем прямое преобразование Фурье. Так как подрезанная функция имеет более широкий спектр, как минимум, из-за нарушения гладкости, корректируем до единицы амплитуды удерживаемых гармоник и обращаем в ноль амплитуды остальных. После чего по полученным фазам строим новый функционал  $S$ , т.е. выполняем прямое преобразование Фурье, и продолжаем итерационный процесс до тех пор, пока функционал от шага к шагу не перестанет меняться. Критерии сужения радиуса обрезки максимума функционала  $S$  рассматривать здесь не будем, но отметим, что скорость сходимости итерационного процесса и качество конечного результата зависят от него весьма сильно. На рис. 5, 6 и 7 представлены одиночные реализации из промежуточных этапов оптимизации функционала  $S$  приведенным алгоритмом, а также конечный результат.

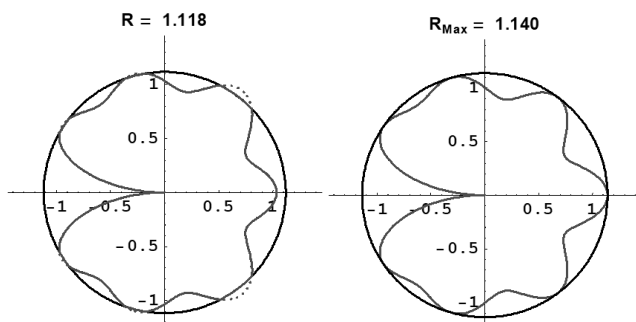


Рис. 7. Минимизация функционала  $S$  для 8 каналов алгоритмом Гершберга–Сакстона, полученного перестановкой (011|0|110)

В частности, предварительные два вариационных результата промежуточной оптимизации для 7 гармоник не могли быть подвергнуты сравнению до окончания процесса, так как итоговая разница между ними составила всего около половины процента (см. рис. 5, 6). Чего уже нельзя сказать об оптимизации 8 каналов (см. рис. 7), когда наиболее оптимальный предполагаемый профиль совпал с итоговым.

### Заключение

Благодаря удачно слаженному тандему из неградиентных алгоритмов удалось повторить лучшие результаты оптимизации, а некоторые из них даже превзойти. На рис. 8 приведены максимальные значения амплитуд функционала  $S$ , полученные ранее и сейчас, а также отмечен теоретический предел. Количественные улучшения начинаются уже с 10 каналов оптимизации, а принципиально качественные уже с 17 гармоник.

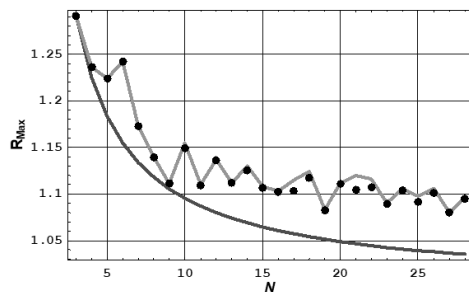


Рис. 8. Сравнение новых значений (кружки) и полученных ранее (углы серой кривой) максимальных значений амплитуд оптимизированных функционалов; гладкая кривая – теоретический предел

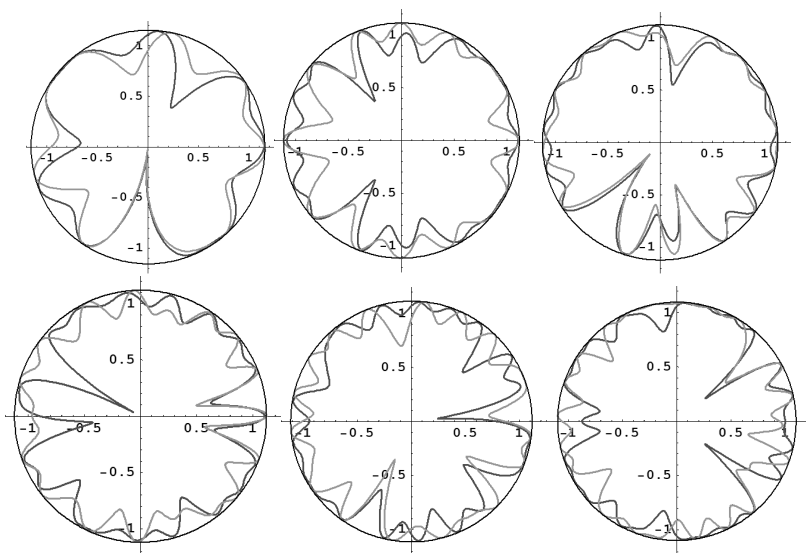


Рис. 9. Сравнение новых (темная кривая) и полученных ранее (серая кривая) профилей амплитуды функционала  $S$  для следующего числа гармоник (слева-направо-сверху-вниз): 10, 17, 18, 21, 22, 25; окружностями обозначены полученные ранее пиковые значения

Помимо общего результата на рис. 9 приведены графики профилей, которые были существенно улучшены новым подходом.

## Список литературы

1. Friese, M. Multitone signals with low crest factor / M. Friese // *IEEE Trans. on Comm.* – 1997. – Vol. 45(10). – P. 1338–1344.
2. Multiwavelength generation in an erbium-doped fiber laser using in-fiber comb filters / J. Chow, G. Town [et al.] // *IEEE Photonics Technol. Lett.* – 1996. – Vol. 8 (1). – P. 60–62.
3. Advances in the design and fabrication of high-channel-count fiber Bragg gratings / Hongpu Li, Ming Li [et al.] // *J. Lightwave Technol.* – 2007. – Vol. 25(9). – P. 2739–2750.
4. Analysis and design of multi-tone signal generation algorithms for reducing crest factor / Yukiko Shibasaki, Koji Asami [et al.] // *2020 IEEE 29th Asian Test Symposium (ATS'20)*. – 2020. – P. 1–6.
5. Three-step design optimization for multi-channel fibre Bragg gratings / K.Y. Kolossovski, R.A. Sammut [et al.] // *Opt. Express.* – 2003. – Vol. 11(9). – P. 1029–1038.
6. Gerchberg, R.W. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures / R.W. Gerchberg, W.O. Saxton // *Optik.* – 1972. – Vol. 35(2). – P. 237–246.
7. Shapiro, D.A. Sixth moment optimization of multi-channel Bragg filters / D.A. Shapiro, A.I. Latkin // *Opt. Commun.* – 2011. – Vol. 284(6). – P. 1565–1568.

## References

1. Friese M. Multitone signals with low crest factor. *IEEE Trans. on Comm.*, 1997, vol. 45, no. 10, pp. 1338-1344.
2. Chow J., Town G. et al. Multiwavelength generation in an erbium-doped fiber laser using in-fiber comb filters. *IEEE Photonics Technol. Lett.*, 1996, vol. 8, no. 1, pp. 60-62.
3. Li Hongpu, Li Ming et al. Advances in the design and fabrication of high-channel-count fiber Bragg gratings. *J. Lightwave Technol.*, 2007, vol. 25, no. 9, pp. 2739-2750.
4. Shibasaki Yukiko, Asami Koji et al. Analysis and design of multi-tone signal generation algorithms for reducing crest factor. *Proceedings of IEEE 29th Asian Test Symposium (ATS'20)*, 2020, pp. 1-6.
5. Kolossovski K.Y., Sammut R.A. et al. Three-step design optimization for multi-channel fibre Bragg gratings. *Opt. Express*, 2003, vol. 11, no. 9, pp. 1029-1038.
6. Gerchberg R.W., Saxton W.O. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures. *Optik*, 1972, vol. 35, no. 2, pp. 237-246.
7. Shapiro D.A., Latkin A.I. Sixth moment optimization of multi-channel Bragg filters. *Opt. Commun.*, 2011, vol. 284, no. 6, pp. 1565-1568.

**Сведения об авторах**

**НЕМЫКИН А.В.**

e-mail: *anti1985ster@gmail.com*

Младший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, Институт автоматизации и электрометрии СО РАН, Новосибирск

**ШАПИРО Д.А.**

e-mail: *shapiro@iae.nsk.su*

Заведующий Лабораторией фотоники, доктор физико-математических наук, профессор, Институт автоматизации и электрометрии СО РАН, Новосибирск

**About the authors**

**A.V. NEMYKIN**

e-mail: *anti1985ster@gmail.com*

Junior researcher, PhD in Physics and Mathematics, Institute of Automation and Electrometry SB RAS, Novosibirsk

**D.A. SHAPIRO**

e-mail: *shapiro@iae.nsk.su*

Head of the Photonics Laboratory, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute of Automation and Electrometry SB RAS, Novosibirsk

**Финансирование.** Работа не имела спонсорской поддержки.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Вклад авторов** равноценный.

**Получена:** 18.09.2024

**Одобрена:** 20.09.2024

**Принята к публикации:** 23.09.2024

**Financing.** The study was not sponsored.

**Conflict of Interest.** The authors declare no conflict of interest.

**The contribution of the authors** is equal.

**Received:** 18/09/2024

**Approved:** 20/09/2024

**Accepted for publication:** 23/09/2024

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом: Немыкин, А.В. Фазовая оптимизация пиковой амплитуды суммы гармоник / А.В. Немыкин, Д.А. Шапиро // Прикладная фотоника. – 2024. – Т. 11, № 3. – С. 62–74.

Please cite this article in English as: Nemykin A.V., Shapiro D.A. Crest factor minimization of the multitone complex signal. *Applied photonics*, 2024, vol. 11, no. 3, pp. 62-74.