

УДК 532.51:532.522

В.П. Первадчук, Д.Б. Владимирова, А.Л. Деревянкина

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ АНАЛИЗ ИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ВЫТЯЖКИ КВАРЦЕВЫХ КАПИЛЛЯРОВ В УСЛОВИЯХ МАЛЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Рассмотрен процесс вытяжки кварцевого капилляра, который описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных. Исследована устойчивость данного процесса, выполнен численный эксперимент, демонстрирующий состояния устойчивости или неустойчивости в зависимости от величин малых гармонических колебаний, вносимых в систему, а также от значений кратности вытяжки.

Ключевые слова: вытяжка оптических волокон, устойчивость, кварцевый капилляр, кратность вытяжки.

V.P. Pervadchuk, D.B. Vladimirova, A.L. Derevyankina

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

UNSTEADY ANALYSIS OF THE ISOTHERMAL PROCESS OF DRAWING QUARTZ CAPILLARIES UNDER CONDITIONS OF SMALL HARMONIC INFLUENCES

The process of drawing a quartz capillary, which is described by a system of partial differential equations, is considered. The stability of this process is investigated, a numerical experiment is performed that demonstrates the stability or instability states depending on the values of small harmonic vibrations introduced into the system, as well as on the values of the stretching ratio.

Keywords: optical fiber drawing, stability, quartz capillary, drawing ratio.

Вытяжка волокна является важным промышленным процессом. Однако, как и любое реальное явление, данный процесс подвержен флуктуациям, которые могут негативно повлиять на качество готового продукта.

Ранее была исследована устойчивость изотермической вытяжки кварцевого капилляра, другими словами, определена чувствительность процесса к малым возмущениям [1]. В свою очередь, в работе [2] был

проведен анализ влияния конечных возмущений на вытяжку сплошного кварцевого цилиндра, при этом решалась нелинейная система, описывающая данный процесс.

Однако для вытяжки капилляра таких исследований не было.

Целью настоящей работы является оценка влияния граничных возмущающих воздействий на внешний и внутренний радиусы капилляра, а также на продольную скорость течения расплава кварца.

Рассмотрим изотермический процесс вытяжки полого кварцевого волокна. Общая схема вытяжки представлена на рис. 1.

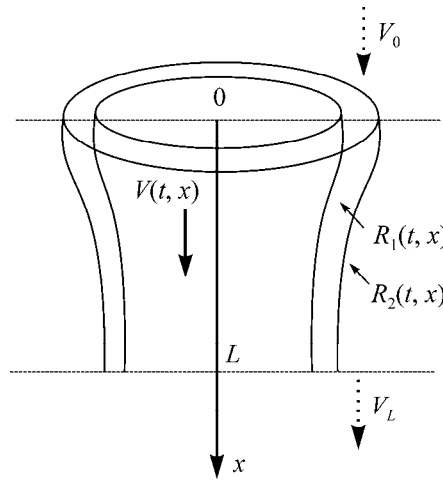


Рис. 1. Общая схема вытяжки кварцевого капилляра

Рассматриваемый процесс описывается следующей системой в безразмерном виде [2–5]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial R_1^2}{\partial t} + \frac{\partial (VR_1^2)}{\partial x} &= \frac{LaR_1^2R_2^2 - \frac{1}{Ma}R_1R_2(R_1 + R_2)}{(R_2^2 - R_1^2)}, \\ \frac{\partial R_2^2}{\partial t} + \frac{\partial (VR_2^2)}{\partial x} &= \frac{LaR_1^2R_2^2 - \frac{1}{Ma}R_1R_2(R_1 + R_2)}{(R_2^2 - R_1^2)}, \\ (R_2^2 - R_1^2) \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) &= \frac{3}{Re} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left((R_2^2 - R_1^2) \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{Fr} + \frac{1}{We} \cdot \frac{\partial (R_1 + R_2)}{\partial x}, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

где $\bar{V}(t, x) = \frac{V(t, x)}{V_L}$ – продольная скорость, для геометрических параметров

$$\bar{y} = \frac{y}{L}, (y \in \{x, R_1(t, x), R_2(t, x)\}), \bar{t} = \frac{tV_L}{L}, Re = \frac{\rho V_L L}{\mu}, Fr = \frac{V_L^2}{Lg},$$

$$We = \frac{\rho V_L^2 L}{\gamma}, La = \frac{P_0 L}{\mu V_L}, Ma = \frac{\mu V_L}{\gamma},$$

ρ, μ – плотность и вязкость кварцевого расплава соответственно, V_0 – скорость подачи преформы, V_L – скорость вытяжки волокна, L – длина исследуемого участка расплава кварца, g – ускорение свободного падения.

Продольная координата x направлена по ходу движения волокна, в размерном виде $x \in [0, L]$. Черта над безразмерными переменными при записи системы (1) опущена.

Система уравнений (1) решается с начальными и граничными условиями:

$$V(0, x) = V_{st}(x), R_2(0, x) = R_{2st}(x), R_1(0, x) = R_{1st}(x),$$

$$V(t, 0) = \frac{V_0}{V_L} = \frac{1}{E}, V\left(t, \frac{L}{L}\right) = 1,$$

$$R_2(t, 0) = \frac{R_{2pref}}{L} = R_{20}, R_1(t, 0) = \frac{R_{1pref}}{L} = R_{10},$$

где R_{1pref}, R_{2pref} – внутренний и внешний радиусы заготовки, E – скоростной коэффициент, постоянный в случае, когда скорости подачи преформы и скорость вытяжки капилляра есть постоянные величины, и равный отношению скорости вытяжки волокна V_L к скорости подачи заготовки V_0 (так называемая кратность вытяжки), $V_{st}(x), R_{2st}(x), R_{1st}(x)$ – радиусы волокна и скорость вытяжки в начальный момент времени.

В работе [1] на основе данной одномерной модели было исследовано влияние радиусов заготовки на устойчивость, а также показано, что при увеличении числа Рейнольдса процесс становится более устойчив. В рамках указанной модели для различных значений числа

Рейнольдса и радиусов заготовки были рассчитаны критические значения скоростного коэффициента $E_{кр}$. При значениях, превышающих $E_{кр}$, система теряет устойчивость. Тем самым была получена область параметров, при которой возможно непрерывное формирование волокна.

Однако проведенный в работе [1] линейный анализ устойчивости не отображает полной картины поведения процесса в случае конечных возмущений.

Для оценки влияния возмущений, действующих на границе, решалась прямая нелинейная задача (1). При этом параметры процесса брались как из полученных в работе [1] областей устойчивости, так и из областей неустойчивости, а также вносились возмущения в скорость подачи волокна, в скорость вытяжки и радиусы заготовки.

Расчеты проводились в системе мультифизического моделирования Comsol Multiphysics для заготовки с радиусами: $R_{1pref} = 0,01$, $R_{2pref} = 0,025$, при следующих значениях критериев вытяжки: $Re = 15,2 \cdot 10^{-5}$, $Fr = 3,4 \cdot 10^{-5}$, $We = 0,22$, $La = 0$, $Ma = 1446,62$. Для данных параметров $E_{кр} \approx 87$.

На первом этапе выбиралось $E = 20$, что соответствует устойчивому состоянию.

Геометрические характеристики волокна как решение прямой дифференциальной задачи в фиксированной точке $x = 1$ представляют собой функции времени и изображены на рис. 2.

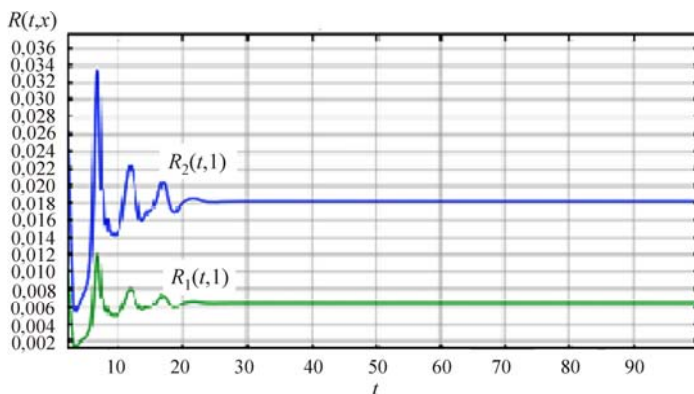


Рис. 2. Функции радиусов волокна в $x = 1$ для $t \in [0,100]$

Стоит отметить, что со временем рассматриваемый процесс стабилизируется, а формы профилей радиуса струи и скорости расплава приближаются к формам, соответствующим своим стационарным состояниям. Профили в стационарном режиме представлены на рис. 3.

Далее попеременно в каждое граничное условие процесса вносились возмущения по синусу с амплитудой $A = 0,05$ и частотой $\omega = 25$ [6].

Стоит отметить, что для производства наиболее важно знать, как возмущения повлияют на качество готового волокна. Поэтому в дальнейшем в работе наблюдение велось за радиусами $R_2(t,1)$, $R_1(t,1)$.

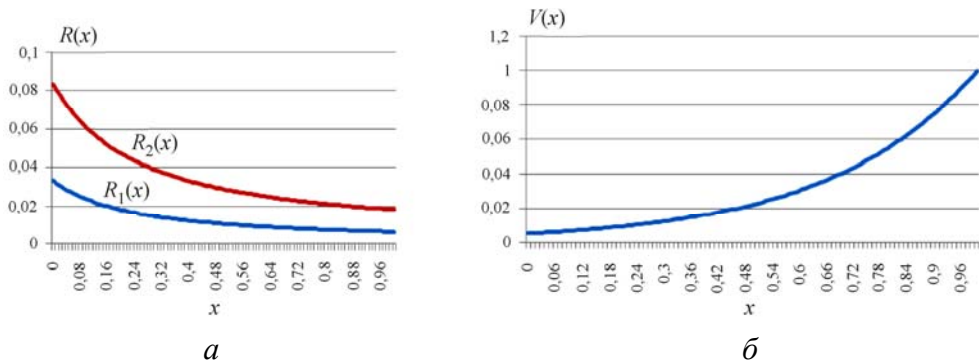


Рис. 3. Функции волокна в стационарном режиме: *a* – функции радиусов волокна; *б* – функция скорости волокна

1. Возмущение внешнего радиуса заготовки:

$$R_2(t,0) = R_{20}(1 + A\sin(2\pi\omega t)) \text{ (рис. 4).}$$

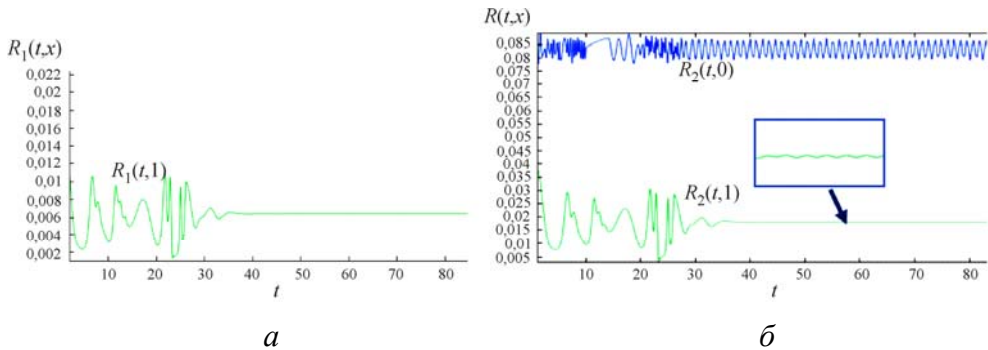


Рис. 4. Функции радиусов волокна при возмущающих воздействиях на внешний радиус заготовки: *a* – $R_1(t,1)$ при возмущающих воздействиях на $R_2(t,0)$; *б* – $R_2(t,1)$, $R_2(t,0)$ при возмущающих воздействиях на $R_2(t,0)$

2. Возмущение внутреннего радиуса заготовки:

$$R_1(t,0) = R_{10}(1 + A \sin(2\pi\omega t)) \text{ (рис. 5).}$$

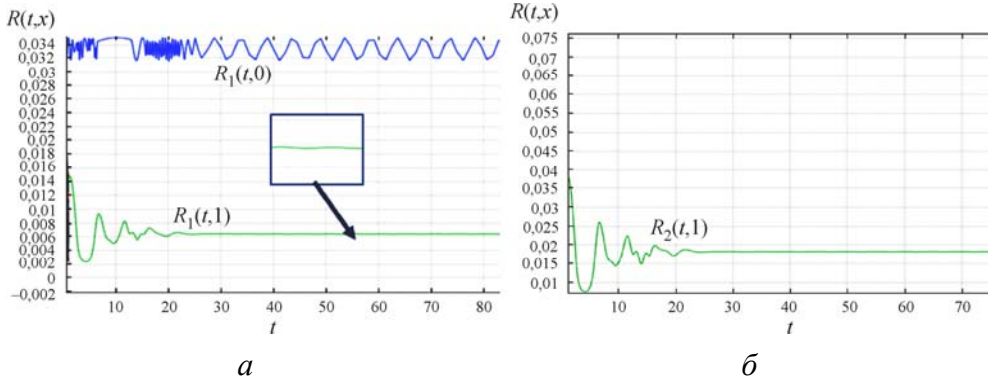


Рис. 5. Функции радиусов волокна при возмущающих воздействиях на внутренний радиус заготовки: *а* – $R_1(t,1)$, $R_1(t,0)$ при возмущающих воздействиях на $R_1(t,0)$; *б* – $R_2(t,1)$ при возмущающих воздействиях на $R_1(t,0)$

3. Возмущение скорости подачи:

$$V(t,0) = \frac{1}{E}(1 + A \sin(2\pi\omega t)) \text{ (рис. 6).}$$

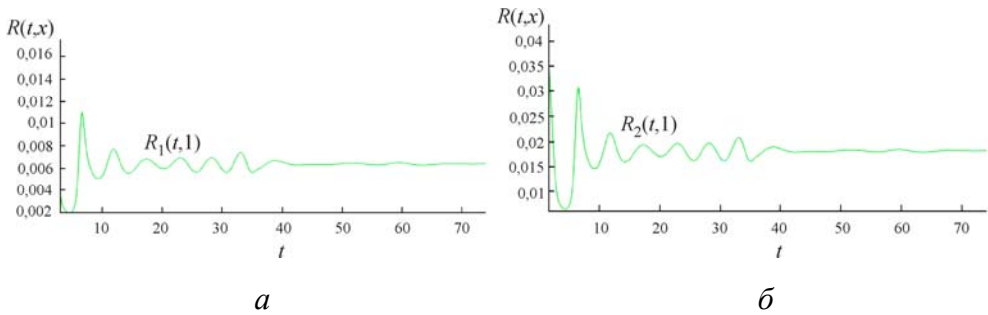


Рис. 6. Функции радиусов волокна при возмущающих воздействиях на скорость подачи заготовки: *а* – $R_1(t,1)$ при возмущающих воздействиях на $V(t,0)$; *б* – $R_2(t,1)$ при возмущающих воздействиях на $V(t,0)$

4. Возмущение скорости вытяжки:

$$V\left(t, \frac{L}{L}\right) = (1 + A \sin(2\pi\omega t)) \text{ (рис. 7).}$$

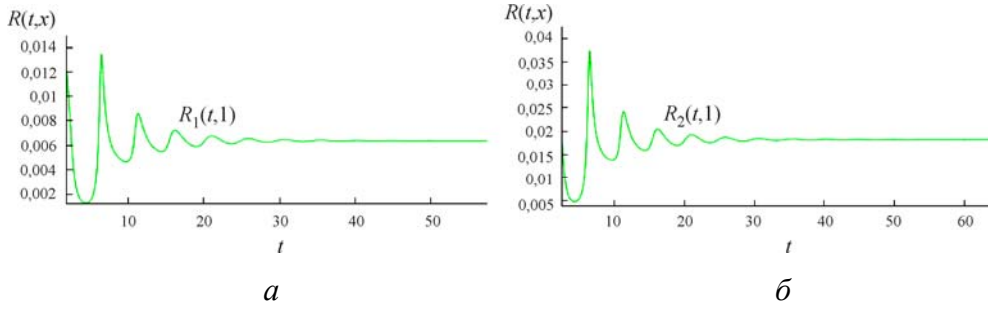


Рис. 7. Функции радиусов волокна при возмущающих воздействиях на скорость вытяжки готового волокна: *a* – $R_1(t,1)$ при возмущающих воздействиях на $V(t,1)$; *б* – $R_2(t,1)$ при возмущающих воздействиях на $V(t,1)$

Итак, процесс, несмотря на внесенные разнообразные возмущения, со временем устанавливается, а формы профилей радиуса струи и скорости расплава приближаются к формам, соответствующим своим стационарным состояниям (рис. 4–7), при этом незначительные колебания сохраняются. Чтобы оценить их величину, были рассчитаны следующие относительные параметры:

$$\Delta R_1(t, x) = \frac{R_1^*(t, x) - R_1(t, x)}{R_1(x, t)}, \quad \Delta R_2(t, x) = \frac{R_2^*(t, x) - R_2(t, x)}{R_2(t, x)},$$

где $R_1(t, x)$, $R_2(t, x)$ – решение исходной задачи, $R_1^*(t, x)$, $R_2^*(t, x)$ – решение, полученное после внесения возмущений.

На рис. 8, 9 представлены полученные расчетные значения относительных величин $\Delta R_1(t,1)$ и $\Delta R_2(t,1)$ в зависимости от времени $t \in [0,100]$ для различных возмущающих воздействий.

Форма решений, представленных на рис. 8 и 9, позволяет судить о затухании со временем амплитуды внесенных колебаний и неоказании ими существенного негативного влияния на характеристики вытягиваемого волокна, в частности на геометрию струи.

Проанализировав полученные результаты, отметим, что при возмущении внутреннего радиуса заготовки на 5 % (величина $A = 0,05$) относительные радиусы $\Delta R_2(t, x)$, $\Delta R_1(t, x)$ в точке $x = 1$ претерпевает изменения в среднем на величину, меньшую 1 %. При возмущении внешнего радиуса преформы внешний и внутренний радиусы изменяются в среднем на 2 %.

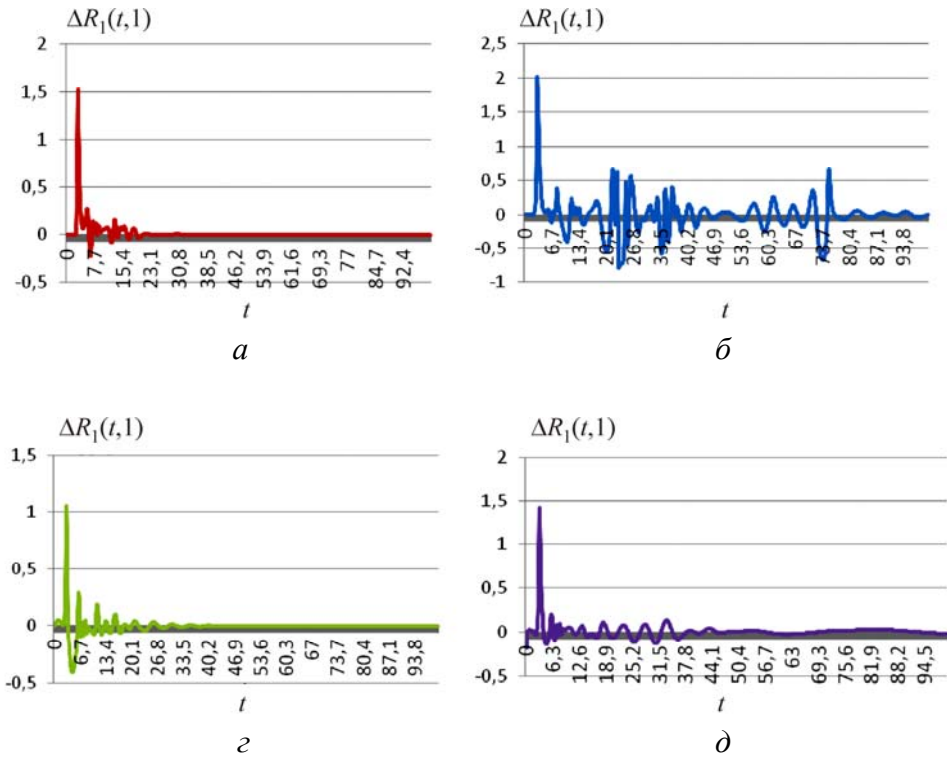


Рис. 8. Значения $\Delta R_1(t,1)$ при различных возмущающих воздействиях: *а* – значения $\Delta R_1(t,1)$ при возмущающих воздействиях на внутренний радиус преформы $\Delta R_1(t,0)$; *б* – значения $\Delta R_1(t,1)$ при возмущающих воздействиях на внешний радиус преформы $\Delta R_2(t,0)$; *в* – значения $\Delta R_1(t,1)$ при возмущающих воздействиях на скорость вытяжки готового волокна $V(t,L)$; *г* – значения $\Delta R_1(t,1)$ при возмущающих воздействиях на скорость преформы $V(t,0)$

При возмущении скорости вытяжки готового волокна на 5 % относительные радиусы $\Delta R_2(t,1)$ и $\Delta R_1(t,1)$ изменяются в среднем меньше, чем на 1 %. При отклонении скорости подачи преформы на 5 % относительные величины $\Delta R_2(t,1)$ и $\Delta R_1(t,1)$ изменяются также незначительно. Отметим, что среднее значение находилось для $t \in [50;100]$.

Полученные выше результаты служат подтверждением стабильности процесса вытяжки при выбранных параметрах.

Далее было рассмотрено поведение системы, когда кратность вытяжки больше, чем критическая, $E = 90$ – модельное неустойчивое состояние.

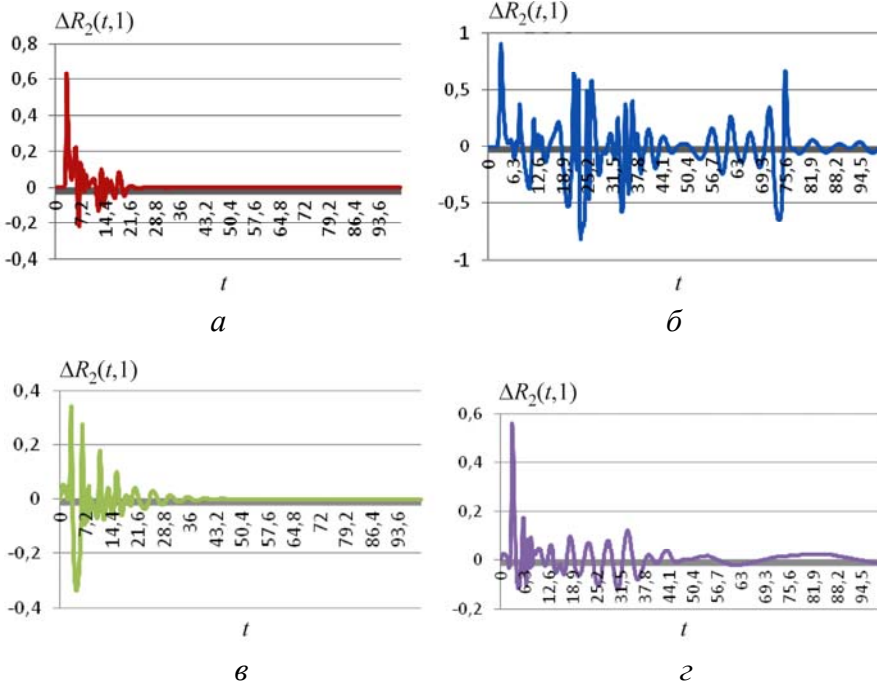


Рис. 9. Значения $\Delta R_2(t,1)$ при различных возмущающих воздействиях: *a* – значения $\Delta R_2(t,1)$ при возмущающих воздействиях на внутренний радиус преформы $R_1(t,0)$; *б* – значения $\Delta R_2(t,1)$ при возмущающих воздействиях на внешний радиус преформы $R_2(t,0)$; *в* – значения $\Delta R_2(t,1)$ при возмущающих воздействиях на скорость вытяжки готового волокна $V(t,L)$; *г* – значения $\Delta R_2(t,1)$ при возмущающих воздействиях на скорость преформы $V(t,0)$

Сначала было найдено решение соответствующей стационарной системы (рис. 10).

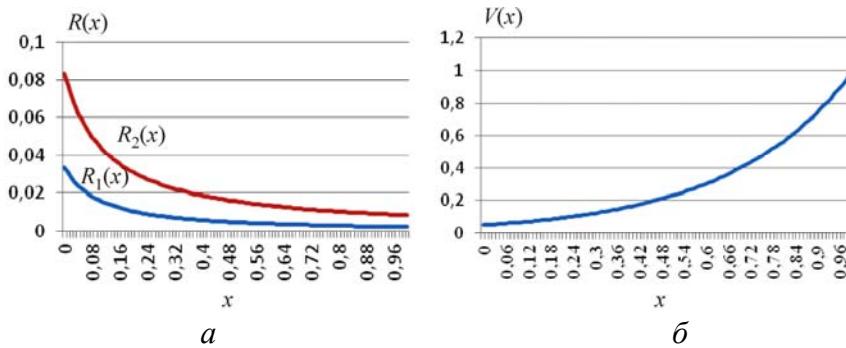


Рис. 10. Функции радиусов волокна стационарной системы: *a* – функции радиусов волокна стационарной системы; *б* – функция скорости волокна стационарной системы

Стоит отметить, что при данных условиях система (1) не решается численно при $t \rightarrow \infty$. Поэтому было рассмотрено состояние процесса при $t \in [0, 10]$. Как видно из рис. 11, в данном случае возникают незатухающие колебания с возрастающей амплитудой, что свидетельствует о неустойчивости процесса.

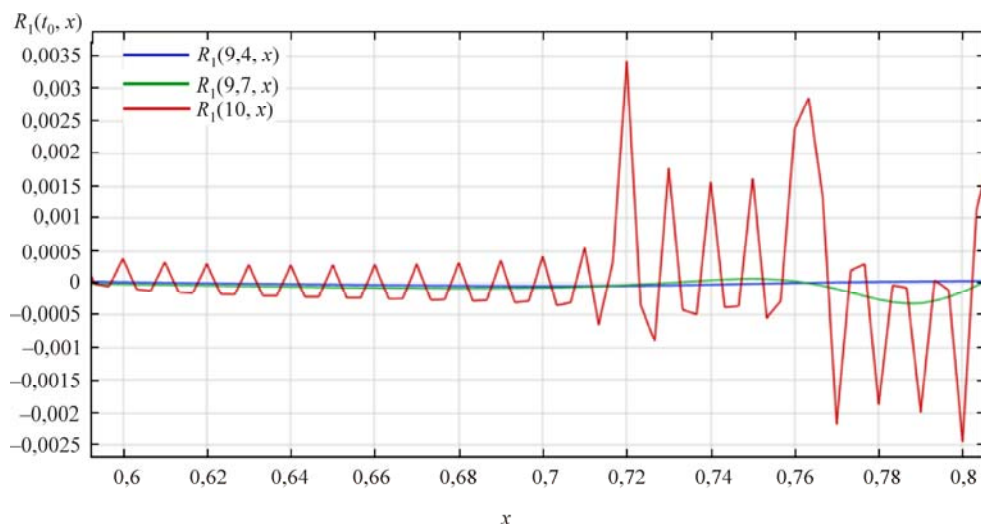


Рис. 11. Радиусы волокна при $t = 10$

В работе рассмотрена одномерная модель вытяжки кварцевых капилляров, решена задача устойчивости вытяжки, выполнен численный эксперимент, демонстрирующий состояния устойчивости или неустойчивости в зависимости от величин малых гармонических колебаний, вносимых в систему, а также от кратности вытяжки. Полученные результаты подтверждают результаты более раннего исследования [1]. Также показано, что процесс наиболее чувствителен к возмущениям радиуса заготовки.

Список литературы

1. Первадчук В.П., Владимирова Д.Б., Деревянкина А.Л. Устойчивость изотермического процесса вытяжки кварцевых капилляров // Прикладная фотоника. – 2015. – Т. 2, № 3. – С. 246–255.
2. Mathematical Modeling of the Self-Pressurizing Mechanism for Microstructured Fiber Drawing / J. Joyce Christopher, Alistair D. Fitt, John R. Hayes, Tanya M. Monro // Journal of lightwave technology. – 2009. – April 1. – Vol. 27, no. 7.

3. Christopher J. Voyce, Fitt Alistair D., Monro T.M. Mathematical model of the spinning of microstructured fibres // *Optics express* 5820.15. – 2004. – November. – Vol. 12, no 23.
4. Asymptotic solutions of glass temperature profiles during steady optical fiber drawing / M. Taroni, C.J.W. Breward, L.J. Cummings, I.M. Griffiths // *OCCAM*. – 2012. – 12/87. – 1–29.
5. Васильев В.Н., Дульнев Г.Н., Наумчик В.Д. Нестационарные процессы при формировании оптического волокна. Устойчивость процесса вытяжки // *Энергоперенос в конвективных потоках*. – Минск, 1985. – С. 64–76.
6. Forest M.G., Zhou H. Unsteady analyses of thermal glass fibre drawing processes Euro // *J. of Applied Mathematics*. – 2001. – 12(4). – 479–96. 10.1017
7. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 224 с.
8. Вержбицкий В.М. Численные методы, линейная алгебра и нелинейные уравнения. – М.: ОНИКС 21 век, 2005. – 145 с.
9. Говорухин В., Цибулин Б. Компьютер в математическом исследовании. – СПб.: Питер, 2001.
10. Иванов Г.А., Первадчук В.П. Технология производства и свойства кварцевых оптических волокон: учеб. пособие. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2011. – 171 с.

References

1. Pervadchuk V.P., Vladimirova D.B., Dereviankina A.L. Ustoichivost izotermicheskogo protsessa vytyazhki kvartsevykh kapilliarov [Isothermal drawing process stability of quartz capillaries]. *Applied photonics*, 2015, vol. 2, no. 3, pp. 246-255.
2. Christopher J.V., Fitt A.D., Hayes J.R., Monro T.M. Mathematical modeling of the self-pressurizing mechanism for microstructured fiber drawing. *Journal of Lightwave Technology*, 2009, vol. 27, no. 7.
3. Christopher J.V., Fitt Alistair D., Monro T.M. Mathematical model of the spinning of microstructured fibres. *Optics express*, 2004, vol. 12, no. 23.
4. Taroni M., Breward C.J.W., Cummings L.J., Griffiths I.M. Asymptotic solutions of glass temperature profiles during steady optical fiber drawing. *OCCAM*, 2012, 12/87, pp. 1-29.

5. Vasilev V.N., Dulnev G.N., Naumchik V.D. Nestatsionarnye protsessy pri formirovanii opticheskogo volokna. ustoichivost protsessa vytiazhki [Unsteady processes during the formation of an optical fiber. Stability of the drawing process]. *Energoperenos v konvektivnykh potokakh*. Minsk, 1985, pp. 64-76.

6. Forest M.G., Zhou H. Unsteady analyses of thermal glass fibre drawing processes *Euro. J. of Applied Mathematics*, 2001, 12(4), pp. 479–496. 10.1017

7. Barbashin E.A. Vvedenie v teoriyu ustoichivosti [Introduction to Sustainability Theory]. Moscow, Nauka, 1967, 224 p.

8. Verzhbitskii V.M. Chislennyye metody, lineinaia algebra i nelineinye uravneniia [Numerical methods, linear algebra and nonlinear equations]. Moscow, ONIKS 21 vek, 2005, 145 p.

9. Govorukhin V., Tsibulin B. Kompiuter v matematicheskom issledovanii [Computer in a mathematical research]. Piter, 2001.

10. Ivanov G.A., Pervadchuk V.P. Tekhnologiya proizvodstva i svoystva kvartsevykh opticheskikh volokon [The production technology and properties of quartz optical fibers]. Perm, Izdatelstvo Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta, 2011, 171 p.

Получено 22.11.19