

УДК 681.7.068

В.П. Первадчук, Д.Б. Владимирова, А.Л. Деревянкина

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

УСТОЙЧИВОСТЬ ИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ВЫТЯЖКИ КВАРЦЕВЫХ КАПИЛЛЯРОВ

Рассмотрен изотермический процесс вытяжки полого волокна, который описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных. Исследована устойчивость данного процесса. Выявлено, что при увеличении числа Рейнольдса устойчивость вытяжки повышается, при этом критическое значение кратности вытяжки также увеличивается. Кроме того, определена зависимость стабильности процесса от радиусов заготовки: устойчивость растет при увеличении внешнего радиуса и при уменьшении внутреннего.

Ключевые слова: вытяжка оптических волокон, устойчивость, конечно-разностный метод.

V.P. Pervadchuk, D.B. Vladimirova, A.L. Dereviankina

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

STABILITY ISOTHERMAL DRAWING PROCESS QUARTZ CAPILLARIES

The isothermal drawing process, which is described by a system of PDEs, was considered. The stability of this process was investigated. It was found that the stability of the drawing process increases with growth of Reynolds number, wherein the critical drafting ratio is also increased. Besides the dependence of the stability on radii of workpiece was revealed. The stability grows at increase of external radius and at reduction of the internal one.

Keywords: drawing of optical fibers, stability, finite-difference method.

Оптоволокно используется во многих областях: в телекоммуникации, медицине, авиатехнике, различных датчиках и т.д. Стоит отметить, что современный мир остро нуждается в производстве не только «классического» оптического волокна (поперечное сечение – круг), но и световодов различной структуры, начиная от полых цилиндров и заканчивая «закрученным» волокном и «пучками» из них [1].

Однако изготовление любого волокна, а особенно «экзотического», – дорогостоящий процесс. Стоит также отметить, что, как и любой реальный процесс, производство волокна может сопровождаться

внешними, неконтролируемыми возмущениями, которые могут оказать негативное воздействие как на качество готовой продукции, так и на процесс изготовления в целом.

В связи с этим рассмотрение процесса вытяжки оптического волокна, в частности исследование его на устойчивость (именно устойчивость характеризует реакцию системы на внешние возмущения), является актуальной и необходимой задачей. В работе исследуется на гидродинамическую устойчивость вытяжка кварцевых капилляров (полых круглых цилиндров). Рассматриваемый изотермический процесс описывается следующей системой нелинейных уравнений в частных производных [2–4]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_1^2}{\partial t} + \frac{\partial(VR_1^2)}{\partial x} = \frac{LaR_1^2R_2^2 - \frac{1}{Ma}R_1R_2(R_1 + R_2)}{(R_2^2 - R_1^2)}, \\ \frac{\partial R_2^2}{\partial t} + \frac{\partial(VR_2^2)}{\partial x} = \frac{LaR_1^2R_2^2 - \frac{1}{Ma}R_1R_2(R_1 + R_2)}{(R_2^2 - R_1^2)}, \\ (R_2^2 - R_1^2) \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{3}{Re} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left((R_2^2 - R_1^2) \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{Fr} + \frac{1}{We} \cdot \frac{\partial(R_1 + R_2)}{\partial x}. \end{array} \right.$$

Здесь Re – число Рейнольдса, Fr – число Фруда, We – число Вебера, La – число Лапласа, Ma – число Марангони. $R_1(t, x)$, $R_2(t, x)$, $V(t, x)$ – безразмерные внешний и внутренний радиусы и продольная скорость соответственно, где x – продольная координата, t – время.

Непосредственный анализ устойчивости проводят следующим образом: вначале выбирают конкретное состояние системы, характеризующееся набором заданных (основных) параметров, а затем в окрестности этого состояния система уравнений линеаризуется, и эта линеаризованная система уже исследуется на устойчивость.

В данной работе указанная процедура была реализована следующим образом: определяющие параметры, к которым относятся радиусы и скорость кварцевого волокна, разделялись на основные и возмущающие:

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \bar{V}(x) [1 + \tilde{V}(t, x)], \\ R_1(t, x) &= \bar{R}_1(x) [1 + \tilde{R}_1(t, x)], \\ R_2(t, x) &= \bar{R}_2(x) [1 + \tilde{R}_2(t, x)]. \end{aligned}$$

В качестве основных параметров выступают стационарные решения системы.

Для удобства записи примем:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \bar{V}(x), \\ \tilde{V} &= \tilde{V}(t, x), \\ \bar{R}_1 &= \bar{R}_1(x), \\ \tilde{R}_1 &= \tilde{R}_1(t, x), \\ \bar{R}_2 &= \bar{R}_2(x), \\ \tilde{R}_2 &= \tilde{R}_2(t, x). \end{aligned}$$

В результате получена система линейных нестационарных уравнений в частных производных, описывающая эволюцию возмущающих воздействий:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = \frac{3}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} + \beta_1(x) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + \beta_2(x) \tilde{V} + \alpha_1(x) \frac{\partial \tilde{R}_2}{\partial x} + \alpha_2(x) \tilde{R}_2 + \theta_1(x) \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial x} + \theta_2(x) \tilde{R}_1, \\ \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial t} + \beta_3(x) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + \beta_4(x) \tilde{V} + \theta_3(x) \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial x} + \theta_4(x) \tilde{R}_1 + \alpha_3(x) \tilde{R}_2 = 0, \\ \frac{\partial \tilde{R}_2}{\partial t} + \beta_3(x) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + \beta_5(x) \tilde{V} + \theta_3(x) \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial x} + \theta_5(x) \tilde{R}_1 + \alpha_4(x) \tilde{R}_2 = 0. \end{cases}$$

Соответствующие коэффициенты имеют вид:

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) &= \frac{6 \bar{V}' \bar{R}_2^2}{\bar{V} \text{Re} \bar{R}^2} + \frac{\bar{R}_2}{\text{We} \bar{V} \bar{R}^2}, \\ \alpha_2(x) &= \frac{-2 \bar{R}_2^2 \bar{V}}{\bar{R}^2} \frac{6}{\bar{R}^2 \bar{V} \text{Re}} \cdot \frac{d}{dx} \left(\bar{R}_2^2 \frac{d\bar{V}}{dx} \right) + \frac{2 \bar{R}_2^2}{\bar{V} \text{Fr} \bar{R}^2} + \frac{\bar{R}_2'}{\text{We} \bar{V} \bar{R}^2}, \\ \beta_1(x) &= \frac{3}{\text{Re} \bar{V} \bar{R}^2} \frac{d}{dx} (\bar{R}^2 \bar{V}') - 2 \bar{V}', \end{aligned}$$

$$\beta_2(x) = \frac{3}{\text{Re} \bar{V} \bar{R}^2} ((\bar{R}^2 \bar{V})' + (\bar{R}^2 \bar{V}') - \bar{V}),$$

$$\theta_2(x) = \frac{-6 \bar{R}_1^2 \bar{V}'}{\bar{R}^2 \bar{V} \text{Re}} + \frac{\bar{R}_1}{\text{We} \bar{V} \bar{R}^2},$$

$$\theta_2(x) = \frac{-6}{\bar{R}^2 \bar{V} \text{Re}} \cdot \frac{d}{dx} \left(\bar{R}_1^2 \frac{d\bar{V}}{dx} \right) + \frac{2\bar{V}' \bar{R}_1^2}{\bar{R}^2} - \frac{2 \bar{R}_1^2}{\bar{V} \text{Fr} \bar{R}^2} + \frac{\bar{R}_1'}{\text{We} \bar{V} \bar{R}^2}$$

$$\beta_3(x) = \frac{\bar{V}}{2},$$

$$\beta_4(x) = \frac{1}{2 \bar{R}_1^2} \frac{d}{dx} (\bar{R}_1^2 \bar{V}'),$$

$$\theta_3(x) = \bar{V},$$

$$\theta_4(x) = \frac{1}{\bar{R}_1^2} \cdot \frac{d}{dx} (\bar{R}_1^2 \bar{V}) - \frac{1}{2 \bar{R}_1} \left(\frac{2 \text{La} \bar{R}_1 \bar{R}_2^2 - \frac{2}{\text{Ma}} \bar{R}_1 \bar{R}_2 - \frac{1}{\text{Ma}} \bar{R}_2^2}{\bar{R}^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2 \bar{R}_1 \left(\text{La} \bar{R}_1^2 \bar{R}_2^2 - \frac{1}{\text{Ma}} \bar{R}_1 \bar{R}_2 (\bar{R}_1 + \bar{R}_2) \right)}{(\bar{R}_1^2 - \bar{R}_2^2)^2} \right),$$

$$\alpha_3(x) = -\frac{\bar{R}_2}{2 \bar{R}_1^2} \left(\frac{2 \text{La} \bar{R}_1^2 \bar{R}_2 - \frac{2}{\text{Ma}} \bar{R}_1 \bar{R}_2 - \frac{1}{\text{Ma}} \bar{R}_1^2}{\bar{R}^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2 \bar{R}_2 \left(\text{La} \bar{R}_1^2 \bar{R}_2^2 - \frac{1}{\text{Ma}} \bar{R}_1 \bar{R}_2 (\bar{R}_1 + \bar{R}_2) \right)}{(\bar{R}_1^2 - \bar{R}_2^2)^2} \right),$$

$$\beta_5(x) = \frac{1}{2 \bar{R}_2^2} \frac{d}{dx} (\bar{R}_2^2 \bar{V}'),$$

$$\alpha_4(x) = \frac{1}{\bar{R}_2^2} \cdot \frac{d}{dx} (\bar{R}_2^2 \bar{V}) - \frac{1}{2 \bar{R}_2} \left(\frac{2 \text{La} \bar{R}_1^2 \bar{R}_2 - \frac{2}{\text{Ma}} \bar{R}_1 \bar{R}_2 - \frac{1}{\text{Ma}} \bar{R}_1^2}{\bar{R}^2} - \frac{2 \bar{R}_2 \left(\text{La} \bar{R}_1^2 \bar{R}_2^2 - \frac{1}{\text{Ma}} \bar{R}_1 \bar{R}_2 (\bar{R}_1 + \bar{R}_2) \right)}{(\bar{R}_1^2 - \bar{R}_2^2)^2} \right),$$

$$\theta_5(x) = -\frac{\bar{R}_1}{2 \bar{R}_2^2} \times \left(\frac{2 \text{La} \bar{R}_1 \bar{R}_2^2 - \frac{2}{\text{Ma}} \bar{R}_1 \bar{R}_2 - \frac{1}{\text{Ma}} \bar{R}_2^2}{\bar{R}^2} + \frac{2 \bar{R}_1 \left(\text{La} \bar{R}_1^2 \bar{R}_2^2 - \frac{1}{\text{Ma}} \bar{R}_1 \bar{R}_2 (\bar{R}_1 + \bar{R}_2) \right)}{(\bar{R}_1^2 - \bar{R}_2^2)^2} \right).$$

Здесь $\bar{R}^2 = \bar{R}_1^2 - \bar{R}_2^2$.

Рассматриваемый режим вытяжки устойчив, если возмущения со временем затухают, в противном случае – неустойчив. Применив метод разделения переменных (представив каждую искомую величину в виде $\tilde{\Psi}(x, \tau) = \psi(x) \cdot e^{-i\omega\tau}$) и выполнив дискретизацию конечно-разностным методом, приходим к системе линейных алгебраических уравнений [5]. Для этой системы по коэффициентам при соответствующих переменных составлялась матрица, по собственным значениям ω которой уже можно судить об устойчивости исследуемого состояния (режима вытяжки). Поскольку собственная частота является комплексным числом, то $\omega = \omega_2 + i\omega_i$, где ω_i – коэффициент нарастания, по знаку которого можно судить о том, затухают или нарастают колебания. Если все $\omega_i < 0$, тогда колебания затухают, а значит, исследуемое состояние (стационарное течение) устойчиво, в противном случае, при $\omega_i > 0$, – неустойчиво [6]. В связи с этим во всех расчетах отслеживалось максимальное значение мнимой части $\omega_i^{(1)}$. Все расчеты проводились в пакете Maple 17. Кроме того, на первом этапе было выбрано оптимальное число разбиений $n = 300$, при котором погрешность была порядка 10^{-4} . В результате получен ряд важных практических выводов.

Прежде чем исследовать зависимость устойчивости от «универсальных» показателей, таких как кратность вытяжки E , под которой в данной работе понимается отношение скорости вытяжки к скорости подачи заготовки, и число Рейнольдса, проанализировали влияние радиусов подаваемой заготовки на устойчивость вытяжки (рис. 1, табл. 1).

Таблица 1

Зависимость $\omega_i^{(1)}$ от радиусов заготовки

$R_1(0)$	$R_2(0)$		
	0,01500	0,02000	0,02500
0,000	-0,38581	-0,40170	-0,41126
0,008	-0,32170	-0,37159	-0,39334
0,010	-0,27717	-0,35720	-0,38630
0,012	-0,18776	-0,33623	-0,37721
0,014	-	-0,30288	-0,36501

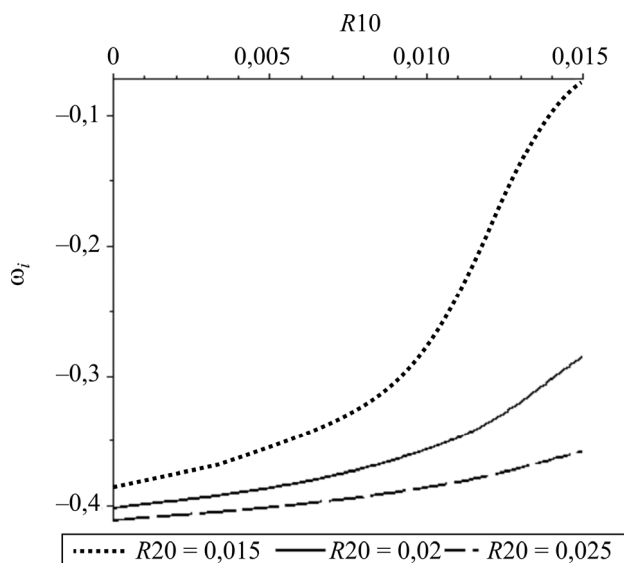


Рис. 1. Зависимость $\omega_i^{(1)}$ от радиусов заготовки

Итак, можно сказать, что устойчивость повышается при возрастании внешнего радиуса и при уменьшении внутреннего.

Теперь перейдем непосредственно к исследованию влияния кратности вытяжки, при этом также проследим, сохраняется ли выявленная ранее зависимость устойчивости от радиусов заготовки (табл. 2, 3, рис. 2).

Таблица 2

Зависимость $\omega_i^{(1)}$ от радиусов заготовки при $E = 20$

$R_1(0)$	$R_2(0)$		
	0,01500	0,02000	0,02500
0,000	-0,38581	-0,40170	-0,41126
0,008	-0,32170	-0,37159	-0,39334
0,010	-0,27717	-0,35720	-0,38630
0,012	-0,18776	-0,33623	-0,37721
0,014	-	-0,30288	-0,36501

Таблица 3

Зависимость $\omega_i^{(1)}$ от радиусов заготовки при $E = 10$

$R_1(0)$	$R_2(0)$		
	0,01500	0,02000	0,02500
0,000	-0,73622	-0,75163	-0,76090
0,006	-0,69657	-0,73093	-0,74760
0,008	-0,66990	-0,72050	-0,74208
0,010	-0,62376	-0,70607	-0,73513
0,012	-0,52512	-0,68481	-0,72610

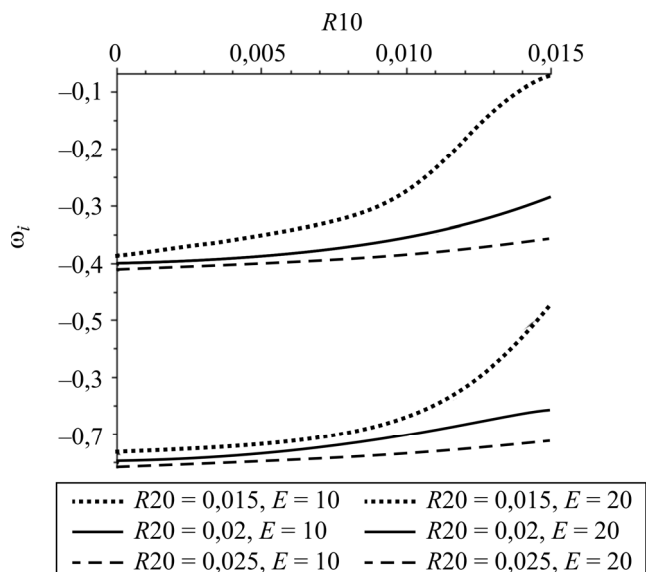


Рис. 2. Зависимость $\omega_i^{(1)}$ от радиусов заготовки при различной E

На основе полученных данных можно сделать вывод о том, что устойчивость обратно пропорциональна кратности вытяжки, при этом влияние соотношений радиусов на качественном уровне сохраняется. Необходимо отметить, что данная зависимость между кратностью и устойчивостью вытяжки была также выявлена в случае сплошного волокна [7].

Зафиксировав кратность вытяжки ($E = 20$), проследим влияние числа Рейнольдса при различных радиусах (табл. 4–6).

Таблица 4

Зависимость $\omega_i^{(1)}$ от радиусов заготовки при $Re = 0,015207$

$R_1 (0)$	$R_2 (0)$		
	0,01500	0,02000	0,02500
0,000	-0,38581	-0,40170	-0,41126
0,008	-0,32170	-0,37159	-0,39334
0,010	-0,27717	-0,35720	-0,38630
0,012	-0,18776	-0,33623	-0,37721
0,014	–	-0,30288	-0,36501

Таблица 5

Зависимость $\omega_i^{(1)}$ от радиусов заготовки при $Re = 0,0015207$

$R_1 (0)$	$R_2 (0)$		
	0,01500	0,02000	0,02500
0,000	-0,40716	-0,40888	-0,40992
0,008	-0,15504	-0,16072	-0,16309
0,010	-0,14969	-0,15912	-0,16233
0,012	-0,13763	-0,15673	-0,16134
0,014	-0,08595	-0,15280	-0,15999

Таблица 6

Зависимость $\omega_i^{(1)}$ от радиусов заготовки при $Re = 0,00015207$

$R_1 (0)$	$R_2 (0)$		
	0,01500	0,02000	0,02500
0,000	-0,03226	-0,03242	-0,03252
0,008	-0,03031	-0,03087	–
0,010	-0,02978	-0,03072	–
0,012	-0,02855	-0,03049	-0,03094
0,014	-0,02248	-0,03010	-0,03081

Теперь зафиксируем радиус и будем варьировать как число Рейнольдса, так и кратность вытяжки (табл. 7).

Таблица 7

Зависимость $\omega_i^{(1)}$ от Re и E при $R_1(0) = 0,01, R_2(0) = 0,025$

Re	E			
	5	10	20	30
15,20782777	-3,5504484	-1,883441777	-0,95063363	-0,6392389
1,520782777	-1,0365541	-0,451139809	-0,19167521	-0,1452

Можно говорить, что устойчивость вытяжки повышается с увеличением числа Рейнольдса, при этом критическое значение скоростного коэффициента также увеличивается, а влияние радиусов заготовки сохраняется.

Таким образом, в работе исследована устойчивость процесса вытяжки полого волокна, при этом получены важные практические выводы, которые могут служить справочным материалом при моделировании рассматриваемого процесса и выборе технологических параметров вытяжки волокна.

Список литературы

1. Иванов Г.А., Первадчук В.П. Технология производства и свойства кварцевых оптических волокон: учеб. пособие. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2011. – 171 с.
2. Joyce C.J., Fitt A.D., Monro T.M. The mathematical modelling of rotating capillary tubes or holey-fibre manufacture // J. Eng. Math. – 2008. – Vol. 60. – P. 69–87.
3. Mathematical Modeling of the Self-Pressurizing Mechanism for Microstructured Fiber Drawing / J. Joyce Christopher, D. Fitt Alistair, R. Hayes John, M. Monro Tanya // Journal of Lightwave Technology. – 2009. – Vol. 27, no. 7.
4. Mathematical model of the spinning of microstructured fibres / J. Joyce Christopher, D. Fitt Alistair, T.M. Monro // Optics Express. – 2004. – Vol. 12, no. 23.
5. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 553 с.

6. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 224 с.

7. Владимирова Д.Б., Деревянкина А.Л., Женетль А.Р. Влияние нелинейных эффектов на устойчивость процесса вытяжки оптического волокна // Перспективы науки. – 2014. – № 3 (54). – С. 56–61.

References

1. Ivanov G.A., Pervadchuk V.P. Tekhnologiya proizvodstva i svoystva kvartsevykh opticheskikh volokon [Production technology and properties of quartz optical fibers]. Perm': Permskii natsional'nyi issledovatel'skii politekhnicheskii universitet, 2011. 171 p.

2. Voyce C.J., Fitt A.D., Monro T.M. The mathematical modelling of rotating capillary tubes or holey-fibre manufacture. *J. Eng. Math.*, 2008, vol. 60, pp. 69-87.

3. Christopher J. Voyce, Fitt Alistair D., Hayes John R., Monro Tanya M. Mathematical Modeling of the Self-Pressurizing Mechanism for Microstructured Fiber Drawing. *Journal of Lightwave Technology*, 2009, vol. 27, no. 7.

4. Christopher J. Voyce, Fitt Alistair D., Monro T. M. Mathematical model of the spinning of microstructured fibres. *Optics Express*, 2004, vol. 12, no. 23.

5. Samarskii A.A. Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem [Introduction to the theory of difference schemes]. Moscow: Nauka, 1971. 553 p.

6. Barbashin E.A. Vvedenie v teoriyu ustoichivosti [Introduction to the theory of stability]. Moscow: Nauka, 1967. 224 p.

7. Vladimirova D.B., Dereviankina A.L., Zhenetl' A.R. Vliianie nelineinykh effektov na ustoichivost' protsessa vytyazhki opticheskogo volokna [The influence of nonlinear effects on the stability of the process of drawing optical fiber]. *Perspektivy nauki*, 2014, no. 3 (54), pp. 56-61.

Получено 10.09.2015