

УДК 681.7.068

В.П. Первадчук, Д.Б. Владимирова, Д.Н. ДектяревПермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Россия**ОПТИМАЛЬНОЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩИЕ УПРАВЛЕНИЕ
ПОДВИЖНЫМ ТЕПЛОВЫМ ИСТОЧНИКОМ
В ПРОЦЕССЕ MCVD**

Рассматривается задача оптимального управления тепловым потоком при парофазном осаждении легирующих добавок в процессе изготовления оптических волокон. Данная задача сформулирована как задача оптимального стабилизирующего управления с распределенным управлением и распределенным наблюдением. Цель управления – поддержание неизменным заданного температурного распределения на нагреваемой поверхности кварцевой трубы. Для квадратичного функционала получена система оптимальности, из решения которой в аналитической форме в явном виде найдена функция управления (тепловой поток).

Ключевые слова: оптимальное управление, распределенные системы, система оптимальности, подвижный тепловой источник, процесс MCVD.

V.P. Pervadchuk, D.B. Vladimirova, D.N. Dektiarev

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

**OPTIMUM STABILIZING MANAGEMENT
OF A MOBILE THERMAL SOURCE IN THE MCVD PROCESS**

The problem of optimum control of a thermal stream at vapor-phase sedimentation of the alloying additives at production of optical fibers is considered. This task is formulated as a problem of the optimum stabilizing control with the distributed management and the distributed supervision. The management purpose – maintenance invariable the set temperature distribution on the heated surface of a quartz pipe. For quadratic functional the system of an optimality which of solution results in the function of management (a thermal stream) in an explicit form found analytically.

Keywords: optimum control, the distributed systems, system of an optimality, a mobile thermal source, process of MCVD.

Введение

Изучение воздействия подвижных источников различной физической природы на объекты и физические среды является весьма актуальной задачей, которая привлекает внимание многих исследователей

уже достаточно длительное время [1]. Один из самых известных примеров – это нагрев твердых тел подвижным источником тепла (электронным, ионным или лазерным лучом, электрической дугой, газовой горелкой и т.п.) [2–4].

Серьезным толчком к постановке и решению задач управления системами с подвижными источниками воздействия послужило создание мощных электронно-лучевых и лазерных установок и внедрение соответствующих технологических процессов (плавка, сварка, зонная очистка, термообработка, напыление пленок в вакууме и т.д.). Выяснилось, что качество выпускаемой продукции существенным образом зависит от того, насколько точно выдерживается заданный температурный режим в ходе технологического процесса, а получение и поддержание заданных температурных режимов и в особенности заданных распределений температур в пространстве и во времени невозможно без управления мощностью, траекторией, скоростью движения луча по поверхности объекта.

1. Постановка задачи

Сразу следует подчеркнуть, что полное математическое описание процесса парофазного осаждения методом MCVD – задача довольно сложная и трудоемкая [4]. Однако с учетом того что одним из главных факторов, влияющих на процесс осаждения, является распределение температуры в зоне термофореза, подбор и поддержание требуемого температурного поля в указанной зоне становятся основной задачей управления процессом MCVD. В свою очередь это температурное поле определяется распределением температуры на внешней поверхности кварцевой трубы, которое, как отмечено выше, зависит от мощности и скорости движения газовой горелки (индуктора), а также формы и размеров факела. При этом распределение температуры вдоль поверхности кварцевой трубы достаточно просто контролировать с помощью сканера.

В работе [5] показано, что при вполне обоснованных предположениях уравнение теплопроводности для тонкостенной кварцевой трубы, нагреваемой подвижной газовой горелкой, имеет вид

$$\frac{\partial \theta(t, z)}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta(t, z)}{\partial z} \right) + \alpha \theta(t, z) + \beta \theta^4(t, z) = F(u, t, z), \quad (1)$$

где t – время; z – продольная координата; u – управление; t – температура кварца; a – коэффициент температуропроводности; α и β – некоторые коэффициенты.

Правая часть уравнения (1), зависящая от теплового потока (управления) $q(x, t)$, имеет вид

$$F(u, t, z) = \beta_1 \cdot q(z, t) + \beta_1 \alpha_c \theta + \beta_1 \varepsilon \sigma_0 \theta_c^4 + \beta_0 \alpha_g \theta_g. \quad (2)$$

Энергия (тепловой поток $q(x, t)$) горелки расходуется на нагрев кварца, теплообмен с движущейся внутри трубы смесью газов, а также теплообмен с внешней средой (воздухом) и излучением во внешнюю среду:

$$q = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} + \alpha_c (\theta - \theta_c) + -\alpha_g (\theta - \theta_g) + \varepsilon \sigma_0 (\theta^4 - \theta_c^4). \quad (3)$$

В уравнениях (1)–(3) приняты следующие обозначения:

$$\alpha = \beta_1 \alpha_c + \beta_0 \alpha_g, \quad \beta = \beta_1 \varepsilon \sigma_0, \quad \beta_1 = \frac{S_1}{\rho c V}, \quad \beta_0 = \frac{S_0}{\rho c V}.$$

Здесь α_g , α_c – коэффициенты теплообмена на внутренней и внешней поверхностях кварцевой трубы соответственно; ε – степень черноты кварца; σ_0 – постоянная Стефана-Больцмана; ρ , λ , c – плотность, коэффициент теплопроводности и удельная теплоемкость кварца; S_1 и S_0 – площади внешней и внутренней цилиндрических поверхностей кварцевой трубы; V – объем, занятый кварцем.

Нелинейное уравнение (1) должно решаться при соответствующем начальном условии и граничных условиях 1–3-го рода.

Пусть нам заранее известно желаемое распределение температуры на внешней поверхности трубы, полученное из решения оптимальной задачи или из каких-либо других соображений, например из опытных данных. Оптимальным процессом будем называть это распределение температуры и соответствующие ей скорость движения источника воздействия или его мощность. В реальных условиях оптимальное программное распределение температуры $Q^*(t, z)$ будет отличаться от фактического распределения температуры $Q(t, z)$ на некоторую величину отклонения (возмущения) $\Delta Q(t, z)$, о которой известно, что это

достаточно малая величина по отношению к программному значению. Тогда можно записать, что

$$\theta(t, z) = \theta \cdot (t, z) + \Delta\theta(t, z). \quad (4)$$

По аналогии запишем, что управление $u(t, z)$ также может быть представлено в виде

$$u(z, t) = u \cdot (t, z) + \Delta u(t, z), \quad (5)$$

где $u^*(t, z)$ – оптимальное программное управление; $u(t, z)$ – фактическое управление.

Линейное уравнение теплопроводности для возмущения $\Delta\theta(t, z)$ можно получить из (1), исходя из следующих соображений: поскольку функции (4) и (5) удовлетворяют уравнению (1), а отклонения $\Delta\theta(t, z)$ и $\Delta u(t, z)$ малы, то при разложении в ряд Тейлора можно удерживать только первые слагаемые [6, 7]. С учетом этих замечаний в данной работе получено уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \Delta\theta}{\partial t} - a \frac{\partial^2 \Delta\theta}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial \Delta\theta}{\partial z} + \beta \Delta\theta = \gamma \Delta u, \quad (6)$$

которое при решении должно быть дополнено начальным условием и граничными условиями.

Предположим, что функция, описывающая подвижный тепловой источник (горелку), имеет следующий вид [5]:

$$q(t, z) = q_{\max} e^{-\left(\frac{z - \int_0^t v(\xi) d\xi}{H} \right)^2},$$

где $v(\xi)$ – скорость движения теплового источника; ξ – переменная интегрирования; H – параметр формы источника, который определяет концентрацию воздействия; q_{\max} – интенсивность (мощность) горелки.

В общем случае целью оптимального стабилизирующего управления является подбор таких параметров теплового источника, как мощность q_{\max} , скорость движения $v(\xi)$ и параметр H , при которых

$|\Delta\theta(t, z)| \rightarrow 0$. В данной работе в качестве функции управления $\Delta u(t, z)$ выбрана мощность горелки q_{\max} .

Функционал, соответствующий такой задаче оптимального управления, имеет вид [5, 8, 9]:

$$F(\Delta u, \Delta\theta) = \int_0^\tau \int_0^L \Delta\theta^2 dz dt + \sigma \int_0^\tau \int_0^L \Delta u^2 dz dt, \quad (7)$$

где σ – положительный параметр (цена управления).

Согласно критерию оптимальности [5] имеем

$$\delta F(\Delta u_0) = 2 \int_0^\tau \int_0^L \Delta\theta(t, z) \cdot \Delta \dot{\theta}(t, z) dz dt + 2\sigma \int_0^\tau \int_0^L \Delta u_0 \cdot \delta(\Delta u) dz dt = 0, \quad (8)$$

где δF – первая вариация функционала; $\delta\Delta u$ – вариация управления; $\Delta \dot{\theta}(t, z)$ – производная функции состояния системы $\Delta\theta(t, z)$ по управлению $\Delta u(t, z)$, вычисленная на минимизирующем элементе Δu_0 .

Проварьируем задачу (6) с соответствующими граничными и начальными условиями, т.е. запишем ее для функции $\Delta \dot{\theta}(t, z)$:

$$\frac{\partial \Delta \dot{\theta}}{\partial t} - a \frac{\partial^2 \Delta \dot{\theta}}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial \Delta \dot{\theta}}{\partial z} + \beta \Delta \dot{\theta} = \gamma \delta(\Delta u), \quad (9)$$

$$\Delta \dot{\theta} \Big|_{t=0} = 0, \quad \Delta \dot{\theta} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \Delta \dot{\theta}}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0.$$

Умножим правую и левую части уравнения задачи (9) на произвольную функцию $p(t, z)$ и проинтегрируем по области решения задачи:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^L \frac{\partial \Delta \dot{\theta}}{\partial t} \cdot p dz dt - a \int_0^\tau \int_0^L \frac{\partial^2 \Delta \dot{\theta}}{\partial z^2} \cdot p dz dt + \alpha \int_0^\tau \int_0^L \frac{\partial \Delta \dot{\theta}}{\partial z} \cdot p dz dt + \beta \int_0^\tau \int_0^L \Delta \dot{\theta} \cdot p dz dt = \\ = \int_0^\tau \int_0^L \gamma \delta(\Delta u) \cdot p dz dt. \end{aligned}$$

После использования формулы Грина получим следующий результат:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L p \cdot \Delta \dot{\theta} \Big|_0^\tau dz - \int_0^\tau \int_0^L \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \Delta \dot{\theta} dz dt - a \int_0^\tau p \cdot \frac{\partial \Delta \dot{\theta}}{\partial z} \Big|_0^L dt + \\
 & + a \int_0^\tau \Delta \dot{\theta} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_0^L dt - a \int_0^\tau \int_0^L \Delta \dot{\theta} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} dz dt + \alpha \int_0^\tau p \cdot \Delta \dot{\theta} \Big|_0^L dt - \\
 & - \alpha \int_0^\tau \int_0^L \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \Delta \dot{\theta} dz dt + \beta \int_0^\tau \int_0^L \Delta \dot{\theta} \cdot p dz dt = \int_0^\tau \int_0^L \gamma \delta(\Delta u) \cdot p dz dt.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Потребуем, чтобы функция $p(t, z)$ удовлетворяла дифференциальной задаче:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + a \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} - \beta p = -\Delta \theta, \\ p|_{t=\tau} = 0, \\ p|_{z=0} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

С учетом (11) интегральное соотношение (10) примет вид

$$\int_0^\tau \int_0^L \Delta \theta \Delta \dot{\theta} dz dt = \int_0^\tau \int_0^L \gamma \delta(\Delta u) \cdot p dz dt. \tag{12}$$

Отметим, что удвоенная левая часть равенства (12) совпадает с первым слагаемым из соотношения (8). С учетом этого равенство (12) может быть записано в виде

$$\int_0^\tau \int_0^L \delta(\Delta u) \cdot (\gamma p + \sigma \Delta u_0) dz dt = 0.$$

Поскольку вариация $\delta(\Delta u) \neq 0$,

$$\Delta u_0(t, z) = -\frac{\gamma p(t, z)}{\sigma}. \tag{13}$$

Таким образом, получена система оптимальности в своей сильной форме, т.е. в форме системы дифференциальных уравнений для функций $\Delta\theta(t, z)$ и сопряженной ей вспомогательной функции $p(t, z)$, следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta\theta}{\partial t} - a \frac{\partial^2 \Delta\theta}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial \Delta\theta}{\partial z} + \beta \Delta\theta = -\frac{\gamma^2 p}{\sigma}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + a \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} - \beta p = -\Delta\theta, \\ \Delta\theta|_{t=0} = \theta_0(z), \quad p|_{t=\tau} = 0, \\ \Delta\theta|_{z=0} = \theta_1(z), \quad p|_{z=0} = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta\theta}{\partial z} \right|_{z=L} = \theta_2(z), \quad \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=L} = 0. \end{array} \right. \quad (14)$$

Решение этой системы уравнений с помощью пакета Matlab позволяет получить выражения для $\Delta\theta(t, z)$ и $\Delta u(t, z)$ в явном (аналитическом) виде, а значит, их можно использовать в устройстве управления процессом MCVD.

2. Основные результаты и их обсуждение

Пусть контроль распределения температуры вдоль поверхности нагрева осуществляется сканером, а измерения температуры выполняются через равные промежутки времени τ . Тогда систему оптимальности (14) будем решать на промежутке времени $[0, \tau]$. Из решения данной задачи найдем оптимальное значение мощности теплового источника $q_{\max}(t, z)$. Это управление будет действовать только на временном промежутке $[0, \tau]$, по истечении которого выполняется новый замер температуры, определяется новое оптимальное значение мощности теплового источника $q_{\max}(t, z)$ и т.д.

Для примера рассмотрим начальное условие в виде функции нормального распределения, представленной на рис. 1.

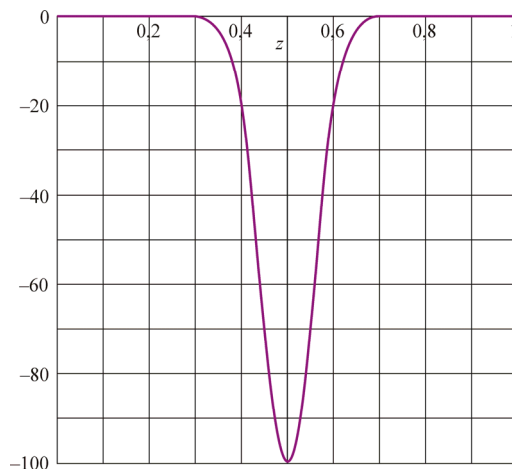


Рис. 1. Распределение температуры в начальный момент времени

На рис. 2 изображено графическое представление решения задачи (14), т.е. оптимальный процесс $(\Delta\theta \cdot (t, z), \Delta u \cdot (t, z))$.

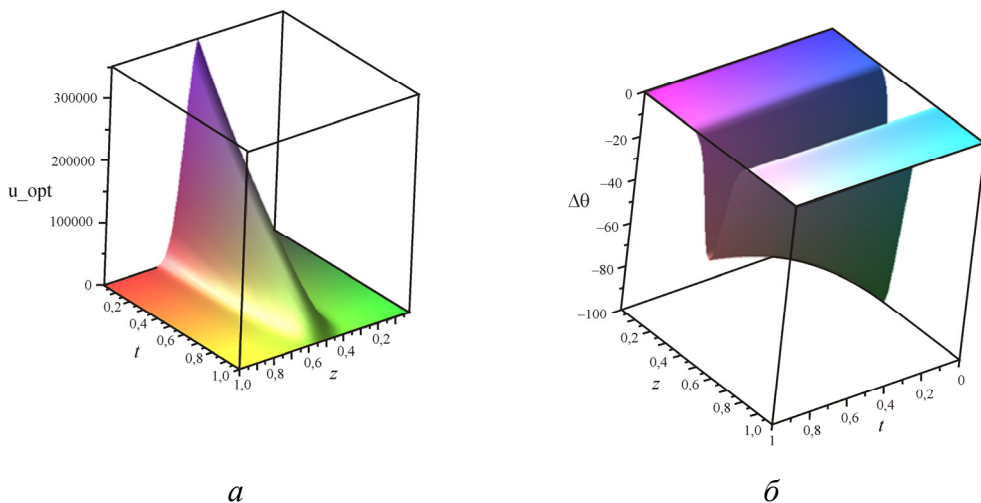


Рис. 2. Изменения мощности горелки Δu (а) и температуры $\Delta\theta$ (б) при $\tau = 1$ с

Сечения поверхностей функций $\Delta\theta$ и Δu при фиксированном значении координаты $z = L/2$ (линия экстремума) приведены на рис. 3.

На рис. 3 отчетливо прослеживаются абсолютные значения уменьшения $\Delta\theta$, а также необходимая для этого мощность источника тепла. Таким образом, за время $\tau = 1$ с удастся скорректировать температуру на 50° , т.е. в два раза.

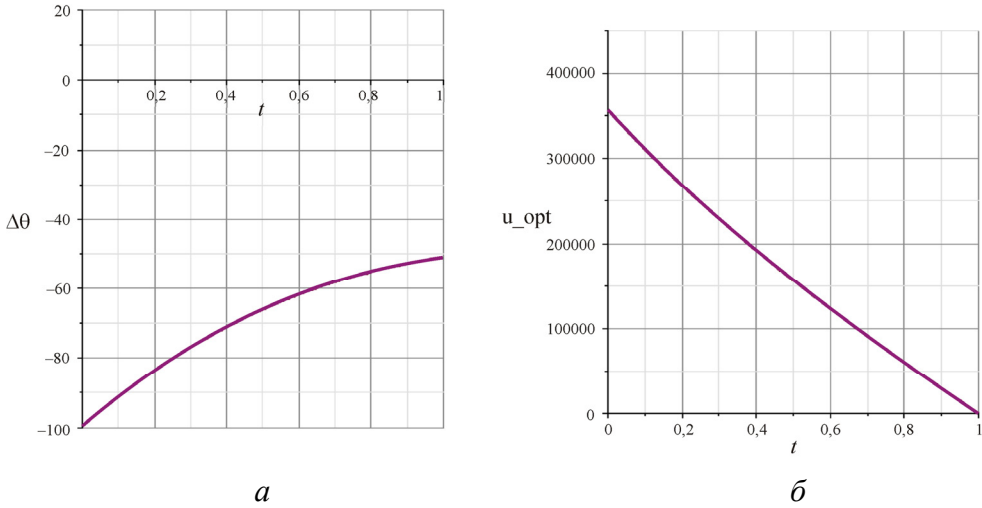


Рис. 3. Изменения во времени температуры (а) и мощности горелки (б) в сечении $z = L/2$ при $\tau = 1$ с

Далее исследуем, возможно ли, управляя расчетным временем процесса τ (периодичность замера температуры сканером), добиться улучшения корректировки уровня $\Delta\theta$. Для этого проведем аналогичные расчеты (не меняя при этом начального состояния системы), установив наблюдаемое время корректировки 2, 4 и 6 с. Получим результаты, представленные на рис. 4–6.

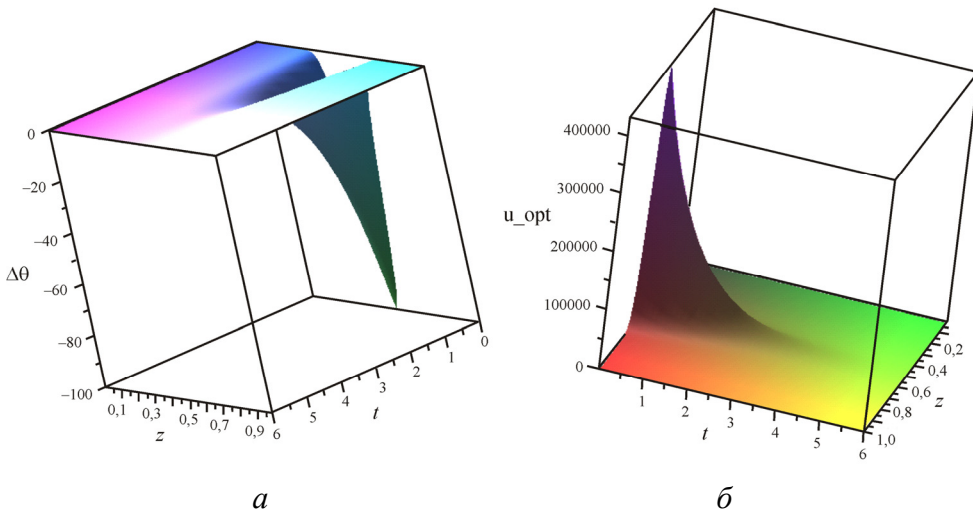


Рис. 4. Изменения температуры $\Delta\theta$ (а) и мощности горелки Δu (б) при $\tau = 6$ с

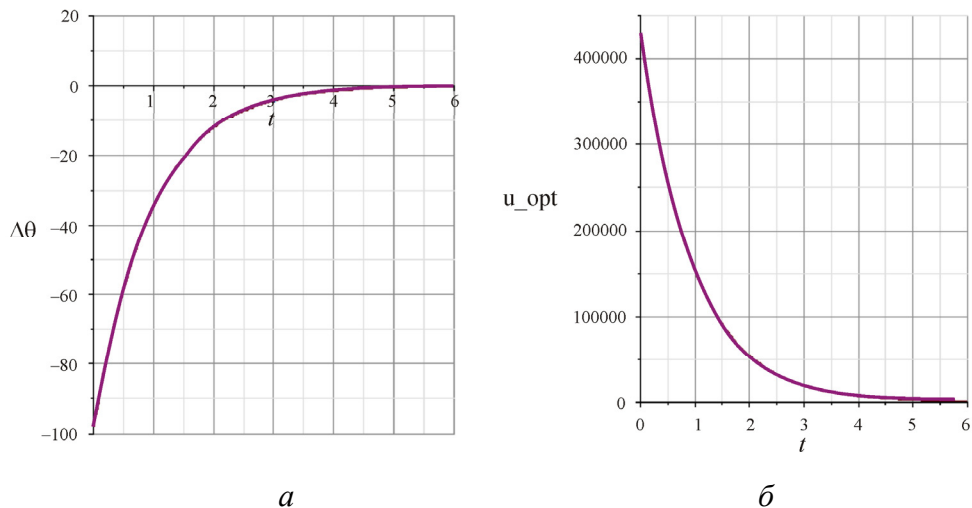


Рис. 5. Изменения во времени температуры (а) и мощности горелки (б) в сечении $z = L/2$ при $\tau = 6$ с

Из рис. 5 видно, что к моменту времени $t = 6$ с величина $\Delta\theta$ достигает близких к нулю значений, а в момент $t = 1$ с имеем наилучший и установившийся показатель $\Delta\theta \sim -34^\circ$.

Кроме того, исследования показали (рис. 6), что при различных значениях времени τ получаем различные оптимальные процессы.

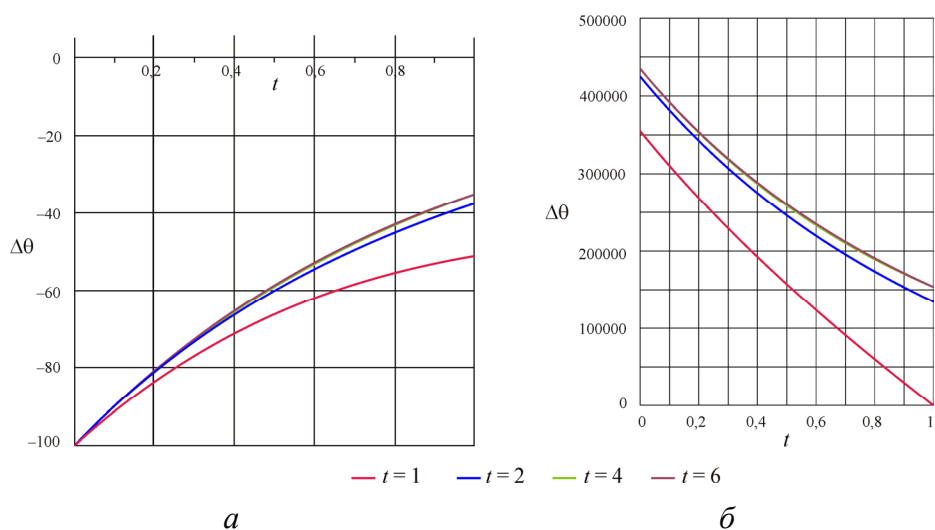


Рис. 6. Зависимость температуры $\Delta\theta$ (а) и мощности горелки Δu (б) от времени процесса τ

Выводы

Таким образом, в данной работе была сформулирована задача оптимального стабилизирующего управления с подвижным тепловым источником. Получено решение системы оптимальности, найдена функция управления Δu , имеющая смысл мощности теплового источника. Предложенный подход позволил найти функцию управления в явном виде, что представляется большим преимуществом в построении автоматизированных систем управления процессом MCVD.

Список литературы

1. Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
2. Кубышкин В.А., Финягина В.И. Подвижное управление в системах с распределенными параметрами. – М.: СИНТЕГ, 2005. – 232 с.
3. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 463 с.
4. Иванов Г.А., Первадчук В.П. Технология производства и свойства кварцевых оптических волокон: учеб. пособие. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2011. – 171 с.
5. Первадчук В.П., Шумкова Д.Б. Оптимальное управление подвижным тепловым источником // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – СПб., 2010. – С. 37–44.
6. Рапопорт Э.Я. Структурное моделирование объектов и систем с распределенными параметрами: учеб. пособие. – М: Высшая школа, 2003. – 299 с.
7. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы: учеб. пособие. – М.: Высшая школа, 1989. – 263 с.
8. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. – Новосибирск: Научная книга, 1999. – 350 с.
9. Шумкова Д.Б. Оптимальное управление в задачах с неизвестными границами и подвижными источниками: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Пермь, 2006. – 111 с.

References

1. Butkovskii A.G., Pustyl'nikov L.M. Teoriia podvizhnogo upravleniia sistemami s raspredelennymi parametrami [The theory of mobile control of systems with distributed parameters]. Moscow: Nauka, 1980. 384 p.
2. Kubyshkin V.A., Finiagina V.I. Podvizhnoe upravlenie v sistemakh s raspredelennymi parametrami [Mobile control in distributed parameter systems]. Moscow: SINTEG, 2005. 232 p.
3. Egorov A.I. Optimal'noe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi protsessami [Optimal control of thermal and diffusion processes]. Moscow: Nauka, 1978. 463 p.
4. Ivanov G.A., Pervadchuk V.P. Tekhnologiia proizvodstva i svoistva kvartsevykh opticheskikh volokon [Production technology and properties of quartz optical fibers]. Permskii natsional'nyi issledovatel'skii politekhnicheskii universitet, 2011. 171 p.
5. Pervadchuk V.P., Shumkova D.B. Optimal'noe upravlenie podvizhnym teplovym istochnikom [Optimal control of a moving heat source]. *Nauchno- tekhnicheskie vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo univesiteta*, 2010, pp. 37-44.
6. Rapoport E.Ia. Strukturnoe modelirovanie ob"ektov i sistem s raspredelennymi parametrami [Structural modeling of objects and systems with distributed parameters]. Moscow: Vysshaia shkola, 2003. 299 p.
7. Aleksandrov A.G. Optimal'nye i adaptivnye sistemy [Optimal and adaptive systems]. Moscow: Vysshaia shkola, 1989. 263 p.
8. Fursikov A.V. Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriia i prilozheniia [Optimal control of distributed systems. Theory and applications]. Novosibirsk: Nauchnaia kniga, 1999. 350 p.
9. Shumkova D.B. Optimal'noe upravlenie v zadachakh s neizvestnymi granitsami i podvizhnymi istochnikami [Optimal control in problems with unknown boundaries and moving sources]. Ph.D. Thesis, Perm', 2006. 111 p.

Получено 15.03.2016