

УДК 532.51:532.522

В.П. Первадчук, Д.Б. Владимирова, А.Л. Деревянкина

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ РАСЧЕТА УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССА ВЫТЯЖКИ КВАРЦЕВЫХ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКОН В УСЛОВИЯХ МАЛЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

В работе рассмотрена одномерная модель вытяжки кварцевых оптических волокон, решена задача устойчивости параметров вытяжки, выполнены два численных эксперимента, демонстрирующих состояния устойчивости или неустойчивости в зависимости от величин малых гармонических колебаний, вносимых в систему, а также от значений пар (Re, E) – «число Рейнольдса – кратность вытяжки».

Ключевые слова: вытяжка оптических волокон, устойчивость, возмущения, кратность вытяжки.

V.P. Pervadchuk, D.B. Vladimirova, A.L. Derevyankina

Perm National Research Polytechnic University, Perm

NUMERICAL EXPERIMENT TO CALCULATE THE STABILITY OF OPTICAL FIBERS DRAWING UNDER CONDITIONS OF SMALL HARMONIC EFFECTS

In this paper, a one-dimensional model of extracting silica optical fibers was considered, the problem of drawing parameters stability was solved, two numerical experiments were performed, demonstrating states of stability or instability depending on the values of small harmonic oscillations introduced into the system, as well as on the values of pairs (Re, E) - "Reynolds number - the draw ratio".

Keywords: optical fiber drawing, stability, disturbances, drawing ratio.

Введение

Вытяжка волокна является одним из важных этапов производства кварцевых оптических волокон. Однако, как и любое реальное явление, данный процесс подвержен флуктуациям, последствия действий которых могут негативно отразиться на качестве готового продукта. Действительно, поток жидкой струи, впрыскиваемой через сопло, известен как неустойчивый из-за капиллярных сил, действующих на

границе, стремящихся минимизировать поверхность цилиндрической струи, превратив ее в капли. Нестабильность процесса начинается с распространения малых осесимметричных возмущений радиуса струи, которые с ростом амплитуд приводят к получению расчетных значений радиуса, соответствующего неустойчивому состоянию и вызывающему на практике распад струи. Несмотря на то, что струя в основном контролируется поверхностным натяжением, иные факторы также могут играть важную роль. Такими факторами, к примеру, являются: соотношение скоростей на входе/выходе, силы инерции, плотность окружающей жидкости (аэродинамические силы), действующие на поверхность струи, а также явление резонанса процесса вытяжки [1].

Отправной точкой, предшествующей началу исследований по данной тематике, было несоответствие между промышленными знаниями о процессе вытягивания волокон и предсказанием моделей устойчивости, содержащихся в литературе. Первый линейный анализ неустойчивости невязкой струи был сделан Вебером в 1931 г. на основе уравнений Эйлера движения, записанных в цилиндрических координатах. Аналогичное решение было предложено Дебаем и Даеном [2]. В качестве окончательного результата в обеих работах выведено дисперсионное уравнение для извилистых волн, представляющее скорость роста этих возмущений как функцию от волнового числа и остальных параметров, а именно поверхностного натяжения и плотности струйных и окружающих жидкостей. Однако важно отметить, что здесь неустойчивость исследовалась в предположении, что поперечное сечение струи имеет постоянный радиус.

Позже в работах Ентова и Ярина [3] получено нелинейное бесконечное решение для поперечной струйной неустойчивости (называемой в работе «изгибной устойчивостью»). Их анализ основан на квазиодномерных уравнениях – аппроксимации вязких уравнений движения [4]. Для исследования изгибной неустойчивости позже в [5] решались трехмерные уравнения Навье–Стокса, соответствующие граничные условия были преобразованы в криволинейные координаты, связанные с движущимся трехгранником оси струи. На основе этих уравнений в [6] проведен анализ линейной неустойчивости вязкой капиллярной струи, протекающей в невязкую несмешивающуюся жидкость. В работе [7] исследована устойчивость стационарных режимов вытяжки в условиях неизотермичности, учтены все виды теплообмена

с окружающей средой. В [8] определена степень чувствительности процесса вытяжки к внешним возмущениям в изотермическом нестационарном режиме, в одномерной постановке.

Целью настоящей работы является оценивание зависимости значений радиуса волокна от величин вносимых колебаний радиуса и скорости на границах для нестационарного изотермического режима вытяжки кварцевых оптических волокон в одномерной осесимметричной постановке.

1. Формулировка задачи

Рассмотрим изотермический процесс вытяжки кварцевого волокна. В безразмерном виде исследуемая система уравнений неразрывности и движения имеет следующий вид [9]:

$$\begin{cases} \frac{\partial R(t, x)}{\partial t} + V(t, x) \frac{\partial R(t, x)}{\partial x} + \frac{R(t, x)}{2} \cdot \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = 0, \\ R^2(t, x) \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + V(t, x) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right) = \frac{3}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(R^2(t, x) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right). \end{cases} \quad (1)$$

Система уравнений (1) решается с начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} V(t, 0) &= \frac{V_0}{V_L} = \frac{1}{E}, \\ V\left(t, \frac{L}{L}\right) &= \frac{V_L}{V_L} = 1, R(t, 0) = \frac{R_{pref}}{L} = R_0, V(0, x) = V_{st}(x), \\ R(0, x) &= R_{st}(x), \end{aligned}$$

где Re – число Рейнольдса, $\text{Re} = \frac{\rho V_0 L}{\mu}$; ρ , μ – плотность и вязкость кварцевого расплава соответственно; V_0 – скорость подачи преформы; L – длина исследуемого участка расплава кварца; R_{pref} – радиус заготовки; E – скоростной коэффициент, постоянный в случае, когда скорости подачи преформы и намотки есть постоянные величины, и равный отношению скорости наматывания волокна V_L к скорости подачи заготовки V_0 (так называемая кратность вытяжки); $R_{st}(x)$, $V_{st}(x)$ – радиус волокна и скорость вытяжки в начальный момент времени, со-

стояния системы; $R(t, x)$, $V(t, x)$ – функции радиуса волокна и скорости вытяжки. Продольная координата x направлена по ходу движения волокна, в размерном виде $x \in [0; L]$; t – время, $t \in [0; \tau]$.

На основе рассматриваемой одномерной изотермической модели было исследовано влияние нелинейности (конвективных членов, величину которых характеризует число Рейнольдса) на устойчивость процесса вытяжки [8], а также получены условия устойчивости в виде диапазона значений для скоростного коэффициента E . В рамках данной модели для различных показателей числа Рейнольдса были рассчитаны критические значения скоростного коэффициента $E_{кр}$. Оценка устойчивости проводилась по классической схеме проверки устойчивости по первому приближению (устойчивость по А.М. Ляпунову). Исследование исходной нелинейной системы свелось к рассмотрению линеаризованной системы (системы уравнений первого приближения). В частности, были рассчитаны все собственные значения якобиана дифференциального оператора, а также проведена оценка знаков их действительных частей. Таким образом, было показано, что при значениях, превышающих $E_{кр}$, система теряет устойчивость. Тем самым была получена область параметров, при которой возможно непрерывное устойчивое формирование волокна (таблица). Величины, представленные в таблице, соответствуют полученным значениям действительных частей собственных чисел дифференциального оператора при проведении линеаризации по малому параметру. Цветом выделены те значения, при которых устойчивость теряется.

Зависимость $\omega_i^{(1)}$ от Re и E

Re	Отношение скоростей E					
	15	20	21,5	25	55	350
10^2	-0,27455	-0,20141	-0,18616	-0,15702	-0,06165	-0,00008
10	-0,15517	-0,09345	-0,08114	-0,05894	0,00294	
1	-0,06508	-0,01980	-0,01144	0,00289		
10^{-1}	-0,05125	-0,00876	-0,00106	0,01198		
10^{-2}	-0,04980	-0,00761	0,00003			
10^{-3}	-0,04965	-0,00749	0,00014			
10^{-4}	-0,04964	-0,00748	0,00015			
10^{-5}	-0,04964	-0,00748	0,00016			

Для получения более развернутых результатов и полного анализа состояний системы для полученных значений пар $(Re; E)$ – «число Рейнольдса – кратность вытяжки» – решалась прямая нелинейная задача (1). Значения пар параметров выбирались как из полученных областей устойчивости, так и из областей неустойчивости процесса вытяжки. При этом в систему (1) искусственно вносились малые возмущения, действующие на границах для скорости подачикварцевой заготовки $V(t,0)$, а также для функций скорости вытяжки $V(t,1)$ и радиуса заготовки $R(t,0)$ [10]. Оценивалось влияние данных колебаний на характеристики готового волокна, в частности на его радиус.

2. Реализация расчетов устойчивости и обсуждение результатов моделирования

Для проведения численных экспериментов с моделью использована система мультифизического моделирования Comsol Multiphysics, базирующаяся на реализации метода конечных элементов для расчета распределенных систем.

2.1. Расчет модели с параметрами $(Re, E) = (0,1; 20)$ – модельное устойчивое состояние

Решение системы (1) проводилось со следующими начальными и граничными условиями:

$$V(t,0) = \frac{1}{E} = \frac{1}{20}, \quad V(t,1) = 1, \quad R(t,0) = \frac{R_{\text{pref}}}{L} = \frac{10^{-4}}{0,3},$$

$$V(0,x) = \frac{1}{E} = \frac{1}{20}, \quad R(0,x) = R_{\text{pref}} = 10^{-4}.$$

На первом этапе исследования получено решение задачи в стационарном режиме, результаты моделирования представлены на рис. 1.

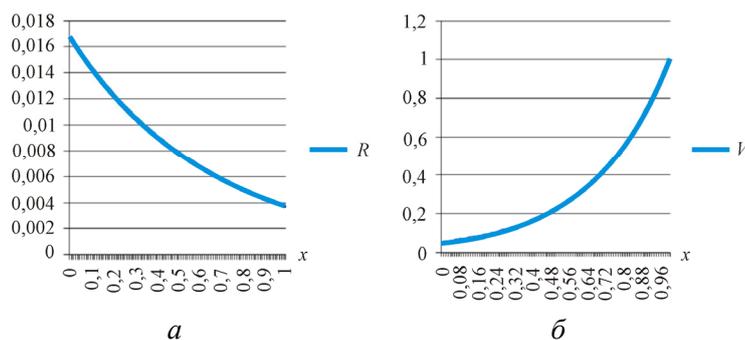


Рис. 1. Функции радиуса (а) и скорости (б) в стационарном режиме вытяжки

Далее попеременно в каждое граничное условие модели (1) были внесены гармонические возмущения для значений радиуса преформы и скоростей вытяжки на входе/выходе:

$$R(t, 0) = R(t, 0) \cdot (1 + A \sin(2\pi\omega t)), \quad V(t, L) = V(t, L) \cdot (1 + A \sin(2\pi\omega t)), \\ V(t, 0) = V(t, 0) \cdot (1 + A \sin(2\pi\omega t)).$$

Частота ω вносимых колебаний принималась равной 25, амплитуда $A = 0,05$. Вид данных возмущений приведен на рис. 2.

Отметим, что оценивались не абсолютные результаты расчета, а относительные параметры модели, зависящие одновременно от решений задачи в исходной постановке и от решений задачи с учетом влияния вносимых флуктуаций. Здесь под относительными параметрами понимались расчетные величины следующего вида:

$$\Delta R(t, x) = \frac{R^*(t, x) - R(t, x)}{R(t, x)};$$

$$\Delta V(t, x) = \frac{V^*(t, x) - V(t, x)}{V(t, x)}.$$

Здесь $R(t, x)$, $V(t, x)$ – решение исходной задачи, $V^*(t, x)$, $R^*(t, x)$ – решение, полученное после внесения возмущающих воздействий. На рис. 3 представлены полученные расчетные значения одной из относительных величин – $\Delta R(t, 1)$ в зависимости от времени для различных возмущающих воздействий.

Проанализировав полученные результаты, отметим, что при возмущении радиуса заготовки на 5 % (величина $A = 0,05$) относительный радиус $\Delta R(t, x)$ в точке $x = 1$ претерпевает изменения в среднем на величину 1 %. При возмущении скорости вытяжки готового волокна на 5 % относительный радиус $\Delta R(t, 1)$ изменяется в среднем на 3 %. При отклонении скорости подачи преформы на 5 % относительная величина $\Delta R(t, 1)$ изменяется в среднем на 2 %. Таким образом, процесс наиболее чувствителен к флуктуации скорости вытяжки. Форма решений, представленных на рис. 3, позволяет судить о затухании во времени внесенных колебаний и неказании ими существенного негативного

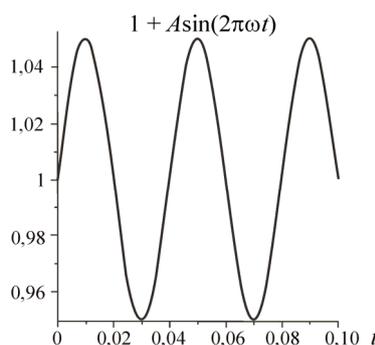


Рис. 2. Вид гармонического воздействия $(1 + A \sin(2\pi\omega t))$

влияния на характеристики вытягиваемого волокна, в частности на геометрию струи. Итак, процесс, несмотря на внесенные разнообразные возмущения, со временем устанавливается, а формы профилей радиуса струи и скорости расплава приближаются к формам, соответствующим своим стационарным состояниям. Тем самым получено подтверждение стабильности процесса вытяжки в случае выбора параметров (подразд. 2.1).

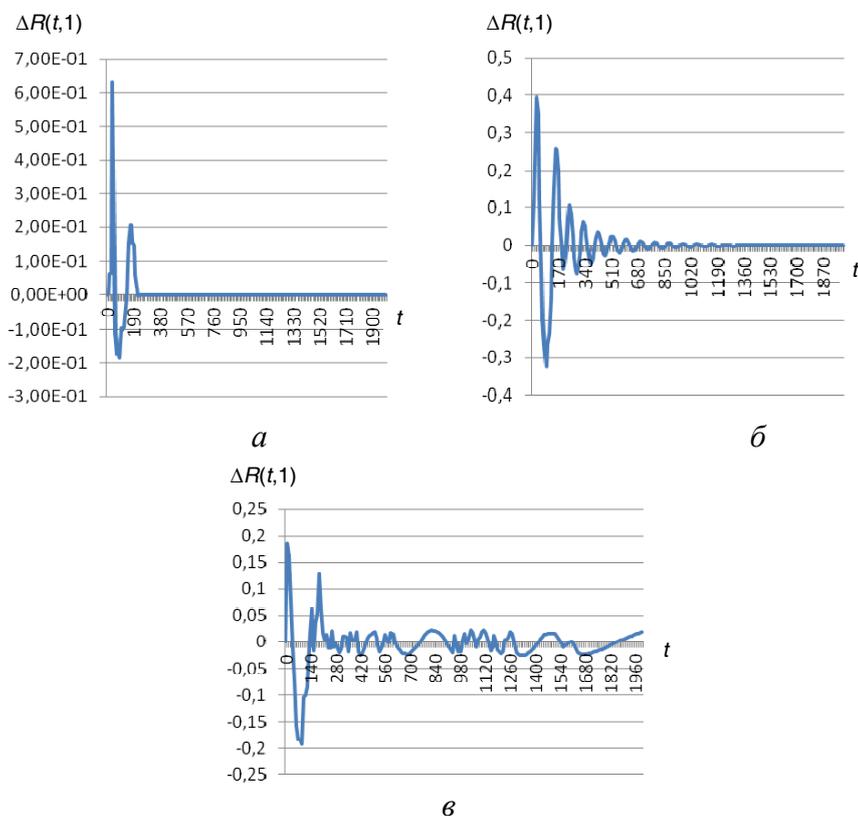


Рис. 3. Значения $\Delta R(t,1)$ при возмущающих воздействиях: на радиус преформы $R(t,0)$ (а); скорость вытяжки готового волокна $V(t,L)$ (б); скорость преформы $V(t,0)$ (в)

Далее рассмотрено поведение системы, когда кратность вытяжки больше, чем критическая, смоделировано ее поведение на паре значений (Re, E) для случая неустойчивого состояния.

2.2. Расчет модели с параметрами $(Re, E) = (0,1; 25)$ – модельное неустойчивое состояние

Решение системы (1) проводилось со следующими начальными и граничными условиями:

$$V(t,0) = \frac{1}{E} = \frac{1}{20}, \quad V(t,1) = 1, \quad R(t,0) = \frac{R_{\text{pref}}}{L} = \frac{10^{-4}}{0,3},$$

$$V(0,x) = \frac{1}{E} = \frac{1}{20}, \quad R(0,x) = R_{\text{pref}} = 10^{-4}.$$

Заметим, что на паре $(Re, E) = (0,1; 25)$ решение системы (1) не сходится к стационарному, поэтому рассмотрены ее решения в некоторый произвольный выбранный момент времени (рис. 4).

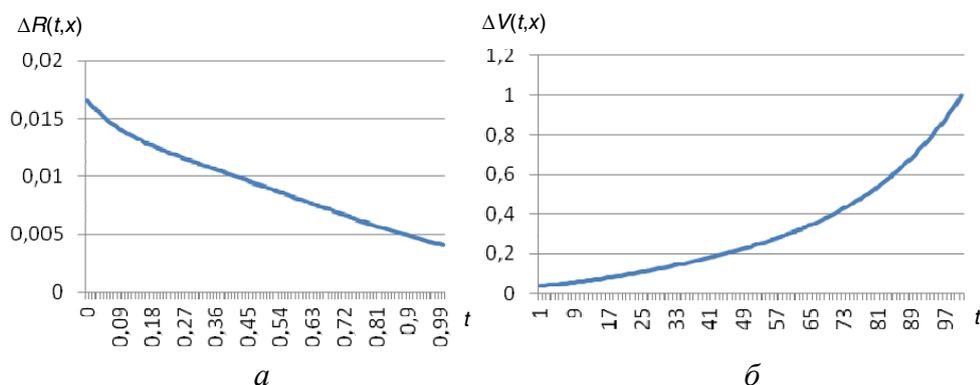


Рис. 4. Функции радиуса (а) и скорости (б) в момент времени $t = 1000$

Аналогично предыдущему внесем возмущающие воздействия для радиуса заготовки, скорости вытяжки и скорости подачи преформы.

На рис. 5 представлены полученные расчетные значения одной из относительных величин $\Delta R(t,1)$ в зависимости от времени для различных возмущающих воздействий. Отметим, что при возмущении радиуса заготовки на 5 % относительный радиус $\Delta R(t,x)$ в точке $x = 1$ претерпевает изменения в среднем на величину 30 %. При воздействии на скорости вытяжки на 5 % величина $\Delta R(t,1)$ изменяется в среднем на величину 60 %. При возмущении скорости подачи на 5 % отклонения $\Delta R(t,1)$ в среднем составили 27 %. Более того, отмечен существенный рост значений величин $\Delta R(t,x)$ и $\Delta V(t,x)$ с увеличением расчетного времени t . Внесенные малые гармонические колебания в данном слу-

чае оказали качественное влияние на характеристики вытягиваемого волокна даже при $t = 1000$ (рис. 6).

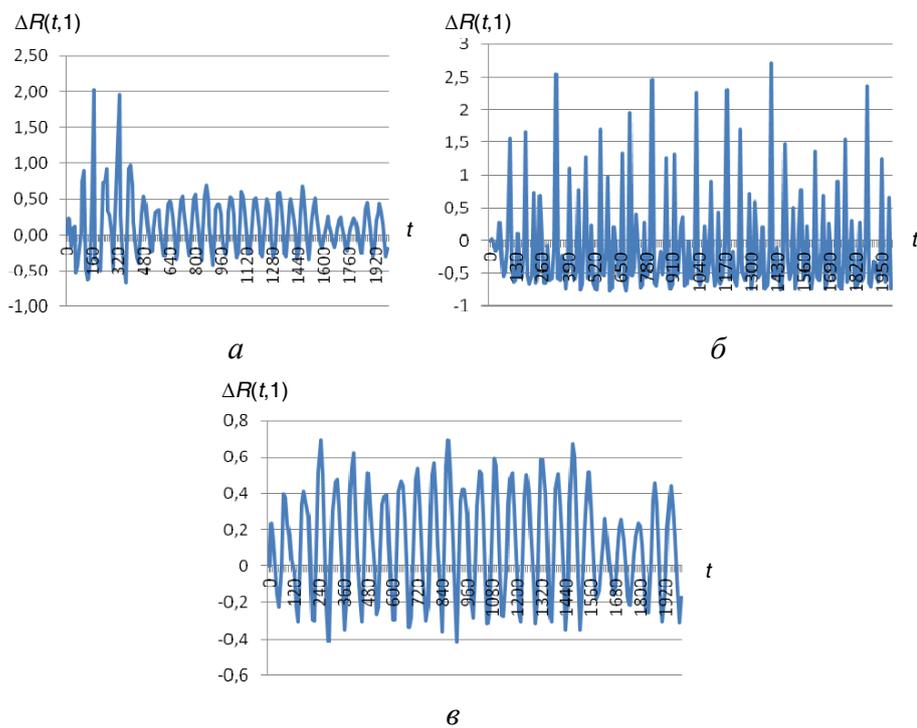


Рис. 5. Значения $\Delta R(t,1)$ при возмущающих воздействиях: на радиус преформы $R(t,0)$ (а); скорость вытяжки готового волокна $V(t,L)$ (б); скорость преформы $V(t,0)$ (в)

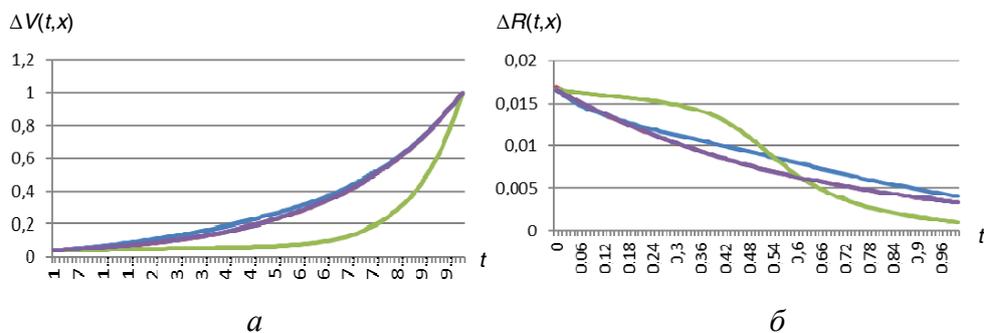


Рис. 6. Скорость расплава (а) и радиус расплава (б): синий цвет – в отсутствие возмущений, фиолетовый цвет – с малыми возмущениями скорости подачи преформы, зеленый цвет – с малыми возмущениями скорости готового волокна

Здесь показаны профили скорости и радиуса струи – решений задачи без вносимых воздействий и с воздействиями. Наиболее чувствительны решения задачи оказались при воздействии на скорости подачи и вытягивания (полученные при этом решения прорисованы фиолетовым и зеленым цветом). Такие результаты, безусловно, свидетельствуют о неустойчивости изучаемого процесса в рамках данной модели при выборе параметров (подразд. 2.2).

3. Краткие выводы

В работе рассмотрена одномерная модель вытяжки кварцевых оптических волокон, решена задача устойчивости параметров вытяжки, выполнены два численных эксперимента, демонстрирующих состояния устойчивости или неустойчивости в зависимости от величин малых гармонических колебаний, вносимых в систему, а также от значений пар (Re, E) – «число Рейнольдса – кратность вытяжки». Полученные численные результаты подтверждают результаты более раннего теоретического исследования [8]. Также показано, что процесс наиболее чувствителен к возмущениям скорости вытяжки, чем к возмущениям геометрических параметров струи.

Список литературы

1. Radev St., Onofri F.R.A., Lenoble A. Tadrict Review on the Instability and Optics of Capillary jets and glass fibres: a fruitful collaboration between Institute of mechanics and IUSTI // *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. – 2013. – 43(2). – P. 5–30.
2. Debye P., Daen J. Stability Considerations on Nonviscous Jets Exhibiting Surface or Body Tension // *The Physics of Fluids*. – 1959. – 2. – P. 416–421.
3. Entov V.M., Yarin A.L. Dynamics of Liquid Jets / Institute for Problem in Mechanics. USSR Acad. Sci. – Preprint No. 127. – Moscow, 1979.
4. Entov V.M., Yarin A.L. The Dynamics of Thin Liquid Jets in Air // *Journal Fluid Mech.* – 1984. – 140. – P. 91–111.
5. Radev S., Tadrict L., Onofri F. Sinuous Instability of a Viscous Capillary Jet injected into an Immiscible Non-viscous Fluid. PART I: 3D-equation of Motion of a Slender Jet in the Moving Trihedron of the Jet Axis // *Journal Theoret. Appl. Mech.* – 2007. – 37. – No. 1. – P. 23–38.

6. Radev St., Onofri F., Tadrist L. Sinuous instability of a viscous capillary jet injected into an immiscible non-viscous fluid. PART II: Different forms and numerical analysis of the numerical analysis of the dispersion equation // *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. – 2007. – 37(2). – 15–32.

7. Radev S.P., Boyadjiev T.L., Onofri F. Mathematical modeling of a steady glass fiber drawing process // *Conference: All-Russian Seminar on Aerohydrodynamics, At St. Petersburg, Russia*. – Vol. E11-2008-161.

8. Владимирова Д.Б., Деревянкина А.Л., Женетль А.Р. Влияние нелинейных эффектов на устойчивость процесса вытяжки оптического волокна // *Перспективы науки*. – 2014. – № 3(54). – С. 60–64.

9. Васильев В.Н., Дульнев Г.Н., Наумчик В.Д. Нестационарные процессы при формировании оптического волокна. Устойчивость процесса вытяжки // *Энергоперенос в конвективных потоках*. – Минск, 1985. – С. 64–76.

10. Ярин А.Л. О возникновении автоколебаний при формировании волокна // *Прикладная математика и механика*. – 1983. – Т. 47, вып. № 1.

References

1. Radev St., Onofri F.R.A., Lenoble A., Tadrist L. Review on the Instability and Optics of Capillary jets and glass fibres: a fruitful collaboration between Institute of mechanics and IUSTI. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, 43(2), pp. 5-30.

2. Debye P., Daen J. Stability considerations on nonviscous jets exhibiting surface or body tension. *The Physics of Fluids*, 1959, 2, pp. 416-421.

3. Entov V.M., Yarin A.L. Dynamics of liquid jets. Institute for Problem in Mechanics, USSR Acad. Sci., Preprint No. 127, Moscow, 1979.

4. Entov V.M., Yarin A.L. The dynamics of thin liquid jets in air. *J. Fluid Mech.*, 1984, 140, pp. 91-111.

5. Radev S., Tadrist L., Onofri F. Sinuous instability of a viscous capillary jet injected into an immiscible non-viscous fluid. Part I: 3D-equation of motion of a slender jet in the moving trihedron of the jet axis. *J. Theoret. Appl. Mech.*, 2007, 37, no. 1, pp. 23-38.

6. Radev St., Onofri F., Tadrist L. Sinuous instability of a viscous capillary jet injected into an immiscible non-viscous fluid. Part II: different

forms and numerical analysis of the numerical analysis of the dispersion equation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, 37(2), pp. 15-32.

7. Radev S.P., Boyadjiev T.L., Onofri F. Mathematical modeling of a steady glass fiber drawing process. *All-Russian Seminar on Aerohydrodynamics*. St. Petersburg, vol. E11-2008-161

8. Vladimirova D.B., Derevyankina A.L., Zhenetl A.R. Vliyanie nelineynykh effektov na ustoychivost protsessa vytyazhki opticheskogo volokna [Влияние нелинейных эффектов на устойчивость процесса вытяжки оптического волокна]. *Perspektivy nauki*, 2014, no. 3(54), pp. 60-64.

9. Vasilev V.N., Dulnev G.N., Naumchik V.D. Nestatsionarnye protsessy pri formirovanii opticheskogo volokna. Ustoychivost protsessa vytyazhki [Non-stationary processes in the formation of optical fiber. Stability of the exhaust process]. *Energoperenos v konvektivnykh potokakh*, Minsk, 1985, pp. 64-76.

10. Yarin A.L. O vzniknovenii avtokolebaniy pri formirovanii volokna [Occurrence of self-oscillations during fiber formation]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1983, vol. 47, iss. 1.

Получено 22.11.2018