УДК 533.9; 537.5; 681.7.068

А.И. Маймистов, Е.И. Ляшко

Национальный исследовательский
ядерный университет – МИФИ, Москва, Россия

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ В ПРИСУТСТВИИ ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрено распространение электромагнитной волны в среде, обладающей топологическими характеристиками в случае, когда в направлении распространения волны приложено постоянной магнитное поле и получены выражения для поляризации такой среды. Для поперечных волн топологические эффекты сводятся к перенормировке плазменной и циклотронной частоты и перенормировке постоянной Верде. В общем случае возникает двойное лучепреломление, которое зависит от потока Берри и приводит к связыванию всех трех компонент электрического поля.

Ключевые слова: оптика, магнитное поле, топологический изолятор, гиротропная среда, вращение вектора поляризации

A.I Maimistov, E.I. Lyashko

National Nuclear Research University,
Moscow Engineering Physics Institute, Moscow, Russia

ELECTROMAGNETIC WAVES IN A MEDIUM WITH TOPOLOGICAL PROPERTIES IN THE PRESENCE OF A CONSTANT MAGNETIC FIELD

The propagation of an electromagnetic wave in a medium with topological characteristics is considered in the case when a constant magnetic field is applied in the direction of wave propagation. The expressions for the polarization of such a medium are obtained. For transverse waves, the topological effects result in the plasma and cyclotron frequencies renormalization and renormalization of the Verde constant. In general case the double refraction occurs, which depends on the Berry flux and it leads to the coupling of all three components of the electric field.

Keywords: optics, magnetic field, topological insulator, gyrotropic medium, rotation of the polarization vector

Введение

Одна из причин наблюдаемого прогресса в фотонике – это использование новых материалов [1–4]. Некоторые из них естественного происхождения (например, нитрид титана [5] и оксид индия-олова (ITO) [6,7]), некоторые созданы искусственно (например, метаматериалы с отрицательным преломлением [8–12] и гиперболические среды [13–16])[1]. Недавно стали привлекать внимание среды, которые ведут себя как диэлектрики, способные проводить ток, причем течет ток только по их поверхности. Особенностью этого поверхностного тока является то, что его направление перпендикулярно направлению вектора электрического поля, притом, что нормаль к границе, вектор электрического поля и вектор плотности поверхностного тока образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов. Аналогичная картина имеет место в эффекте Холла, но в роли магнитного поля в обсуждаемых средах выступает другая векторная величина, обусловленная топологическими свойствами волновой функции электронов, отражающих эффект спин-орбитального взаимодействия. Сами среды получили название топологических изоляторов (ТИ) [19–23]. Другим характерным свойством топологических изоляторов является магнитоэлектрический эффект – электрическая индукция, представляемая линейной комбинацией векторов электрического и магнитного поля [20, 23]. И то же справедливо для магнитной индукции. Магнитоэлектрическая восприимчивость в ТИ является скалярной величиной, что невозможно в обычных средах. Помимо ТИ известны другие среды, обладающие топологическими характеристиками, например, полуметалл Вейля [24].

Решения прикладных задач фотоники опираются на результаты предварительных теоретических и экспериментальных исследований свойств новых материалов. Что касается ТИ, здесь уже получен ряд результатов. В работах, посвященных изучению оптических свойств ТИ, обычно рассматривались явления, возникающие на границе раздела обычного проводника или материалов с отрицательным преломлением и ТИ. Были получены дисперсионные характеристики поверхностных плазмон-поляритонов [25, 26] и фазовый сдвиг Гуса – Хенгена [27–29]. Показано, что магнитоэлектрический эффект приводит к эффекту Фарадея при преломлении электромагнитной волны на границе раздела двух сред [30]. Предсказано образование поперечного спинового момента с перпендикулярной к границе раздела компонентой, переносимого поверхностной волной [31,32], что отсутствует в случае обычных сред.

---

[1] Подробно со свойствами и различными приложениями можно ознакомиться в книгах [17, 18].

В настоящей работе рассмотрено поведение электромагнитной волны в ТИ при условии, что приложено постоянное магнитное поле, величина которого столь велика, что влиянием собственного магнитного поля волны можно пренебречь. Для определения линейной поляризации использована модель Друде – Лоренца, обобщенная на случай ТИ. Присутствие постоянного магнитного поля приводит к появлению гиротропии среды. Топологические свойства среды влекут перенормировки плазменной и циклотронной частот и постоянной Верде. Изменение направления магнитного поля приводит к появлению двойного лучепреломления, при котором оказываются связанными все три компоненты электрического поля электромагнитной волны.

1. Квазиклассическое описание динамики электронов

В квазиклассическом приближении динамика электронов (т.е. заряженных квазичастиц в кристалле) описывается как движение волнового пакета под действием электрического и магнитного полей [33]. В предположении, что межзонные переходы можно не учитывать, динамика электронов в топологических средах описывается следующей системой уравнений [34, 35]:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{p}) + \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{\Omega}(\mathbf{p}), \qquad \dot{\mathbf{p}} + \gamma\mathbf{p} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B},$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ – напряженности внешнего электрического и магнитного полей, $\mathbf{r}$ – положение центра волнового пакета зонных электронов, $\mathbf{p}$ – вектор квазиимпульса, сопряженного координате $\mathbf{r}$, и точка над векторами означает взятие производной по времени, параметр γ отвечает за потери. Скорость $\mathbf{v}(\mathbf{p})$ определена стандартно через кинетическую энергию электрона в разрешенной зоне $\mathcal{E}(\mathbf{p})$: $\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \partial\mathcal{E}(\mathbf{p})/\partial\mathbf{p}$. При наличии топологических свойств среды возникает поправка к скорости, которая определена вектором кривизны Берри $\mathbf{\Omega}$. По существу, топологические свойства среды описываются этим вектором [19–22, 34, 35].

Если $\mathbf{\Omega}$ не зависит от квазиимпульса, то для описания динамики заряженных частиц в топологическом материале можно использовать уравнение обобщенной модели Друде – Лоренца [36]:

$$m\left[1 + \frac{e}{c}(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{B})\right]\frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\gamma\mathbf{v} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} + \frac{e^2}{c}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})\mathbf{\Omega}. \qquad (1)$$

В поперечном поле последнее слагаемое в (1) исчезает, и все поправки топологической природы к поляризации среды как линейные, так и нелинейные определяются зависимостью эффективной массы от напряженности магнитного поля волны.

Пусть полное магнитное поле $\mathbf{B}$ складывается из внешнего постоянного поля $\mathbf{B}_0$ и магнитного поля волны, напряженность которого много меньше напряженности внешнего магнитного поля. В этом случае (1) становится линейным уравнением, и исследование отклика топологической среды на электромагнитное поле становится простой задачей. Исходя из (1), надо определить поляризацию среды и из волнового уравнения с заданной поляризацией определить поведение электромагнитной волны, распространяющейся в среде.

2. Поляризация среды

Пусть вектор внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{n}$ выделяет направление в пространстве, которое можно отождествить с осью координат Z. Уравнение (1) принимает следующий вид:

$$m^* \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\gamma\mathbf{v} = e\mathbf{E} + \frac{eB_0}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{n} + \frac{e^2 B_0}{c}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathbf{\Omega}, \qquad (2)$$

где параметр

$$m^* = m\left[1 + \frac{e}{c}(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{B}_0)\right]$$

играет роль эффективной массы. В таком приближении задача определения поляризации среды сводится к задаче о движении заряженных частиц (электронов), имеющих эффективную массу m^*, в электромагнитном поле волны и под действием дополнительной силы (последнее слагаемое в правой части (2)).

Уравнение (2) линейное, следовательно, может быть решено стандартными способами. Если выполнить преобразование Фурье $\mathbf{v}(t) \to \mathbf{v}(\omega)$, $\mathbf{E}(t) \to \mathbf{E}(\omega)$, где

$$\mathbf{F}(t) \to \mathbf{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(t)e^{i\omega t}dt,$$

то уравнение (2) отобразится в линейное векторное уравнение:

$$-i\omega m^{*}\mathbf{v}(\omega)+m\gamma\mathbf{v}(\omega)-\frac{eB_0}{c}\mathbf{v}(\omega)\times\mathbf{n}=e\mathbf{G}=e\left(\mathbf{E}+\frac{eB_0}{c}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathbf{\Omega}\right).$$

Решение полученного линейного уравнения можно найти обычными методами линейной алгебры:

$$\mathbf{v}(\omega)=\frac{\alpha e}{\alpha^2+\beta^2}\left[\mathbf{G}-\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{n}\times\mathbf{G}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}(\mathbf{G}\cdot\mathbf{n})\mathbf{\Omega}\right].$$

где $\alpha=(m\gamma-i\omega m^{*})$ и $\beta=m\omega_c$. Используя соотношение $en_e\mathbf{v}(\omega)=-i\omega\mathbf{P}(\omega)$, можно получить выражение для поляризации среды:

$$4\pi\mathbf{P}(\omega)=-\frac{\omega_p^2\tilde{\omega}f}{\omega(\tilde{\omega}^2-f^2\omega_c^2)}\left(\mathbf{E}(\omega)-i\frac{\omega_c f}{\tilde{\omega}}\mathbf{n}\times\mathbf{E}(\omega)-\frac{\omega_c^2 f^2}{\tilde{\omega}^2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\right)+$$
$$+\frac{\omega_p^2\tilde{\omega}f(eB_0/c)}{\omega(\tilde{\omega}^2-f^2\omega_c^2)}\left(\mathbf{\Omega}(\omega)-i\frac{\omega_c f}{\tilde{\omega}}\mathbf{n}\times\mathbf{\Omega}(\omega)-\frac{\omega_c^2 f^2}{\tilde{\omega}^2}(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\right)(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}).$$

Здесь используются обозначения $f=m/m^{*}$, комплексная частота $\tilde{\omega}=\omega+if\gamma$, формула для плазменной частоты $\omega_p^2=4\pi e^2 n_e/m$ (n_e – плотность зарядов) и $\omega_c=eB_0/cm$ – циклотронная частота. Пусть будет рассмотрен высокочастотный предел поляризации $\gamma<<\omega$, когда можно положить $\gamma=0$ и считать среду прозрачной. Выражение для поляризации записывается в этом пределе следующим образом:

$$4\pi\mathbf{P}(\omega)=-\frac{\omega_p^2 f}{(\tilde{\omega}^2-f^2\omega_c^2)}\left(\mathbf{E}(\omega)-i\frac{\omega_c f}{\omega}\mathbf{n}\times\mathbf{E}(\omega)-\frac{\omega_c^2 f^2}{\omega^2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\right)+$$
$$+\frac{\omega_p^2 f(eB_0/c)}{(\tilde{\omega}^2-f^2\omega_c^2)}\left(\mathbf{\Omega}(\omega)-i\frac{\omega_c f}{\omega}\mathbf{n}\times\mathbf{\Omega}(\omega)-\frac{\omega_c^2 f^2}{\omega^2}(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\right)(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}). \quad (3)$$

Первое слагаемое описывает эффекты преломления, второе слагаемое – гиротропию, третье слагаемое отражает наведенную внешним магнитным полм анизотропию. При $\mathbf{\Omega}=0$ эти три слагаемых остаются, причем множитель f обращается в единицу. Последние два слагаемых в (3) обусловлены топологическими свойствами среды. При условии, что вектор электрического поля волны ортогонален $\mathbf{B}_0=B_0\mathbf{n}$, эти слагаемые пропадают. Однако множитель f отличается от единицы, что учитывает топологические характеристики среды.

Можно ввести линейную восприимчивость среды $\tilde{\chi}_1(\omega)$ согласно выражению:

$$4\pi\tilde{\chi}_1(\omega) = -\frac{\omega_p^2 f}{(\omega^2 - f^2\omega_c^2)} .$$

Тогда (3) переписывается в следующей форме:

$$\mathbf{P}(\omega) = \tilde{\chi}_1(\omega)\left\{\mathbf{E}(\omega) - i\frac{\omega_c m}{\omega m^*}\mathbf{n}\times\mathbf{E}(\omega) - \frac{\omega_c^2 m}{\omega^2 m^*}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} + \right.$$
$$\left. + \frac{eB_0}{c}\left[\mathbf{\Omega} - \frac{\omega_c^2 m}{\omega^2 m^*}(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - i\frac{\omega_c m}{\omega m^*}(\mathbf{n}\times\mathbf{\Omega})\right](\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\right\} .$$

Выражение для вектора электрической индукции принимает вид:

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon_p(\omega)\mathbf{E}(\omega) - i\mathbf{g}(\omega)\times\mathbf{E}(\omega) - \tilde{\chi}_1(\omega)\frac{\omega_c^2 f^2}{\omega^2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} +$$
$$+ \frac{eB_0}{c}\tilde{\chi}_1(\omega)\left[\mathbf{\Omega} - \frac{\omega_c^2 f^2}{\omega^2}(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - i\frac{\omega_c f}{\omega}(\mathbf{n}\times\mathbf{\Omega})\right](\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}) . \qquad (4)$$

Здесь

$$\varepsilon_p = \left(\varepsilon_b - \frac{\omega_p^2 f}{\omega^2 - \omega_c^2 f^2}\right),$$

где ε_b – вклад в диэлектрическую проницаемость связанных зарядов. Последнее слагаемое в (4) описывает эффекты, которые обусловлены внешним магнитным полем и топологическими свойствами среды. Для вектора гирации здесь получено выражение:

$$\mathbf{g}(\omega) = \frac{\omega_p^2\omega_c f^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2 f^2)}\mathbf{n} = \tilde{\chi}_1(\omega)\left(\frac{\omega_c f}{\omega}\right)\mathbf{n} . \qquad (5)$$

Если учесть замену переменных $\omega_p^2 \to \tilde{\omega}_p^2 = \omega_p^2 f$ и $\omega_c \to \tilde{\omega}_c = \omega_c f$, где $f = \left(1 + \frac{e}{c}(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{B}_0)\right)^{-1} \approx 1 - \frac{e}{c}(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{B}_0)$, то выражения для поправки к диэлектрической проницаемости и (5) по внешнему виду совпадают со стандартными формулами для диэлектрической проницаемости и вектора гирации в обычных средах (см. [37]). Таким образом, топологические свойства среды, в которой распространяется ЭМ волна, проявляются как перенормировка плазменной частоты и циклотронной частоты. Так как рассматривался случай сильного магнитного поля: $B_0 >> B$, предел $B_0 \to 0$ не рассматривается. При отсутствии внешнего магнитного поля исходным уравнением движения является (1).

3. Геликоны и эффект Фарадея

Пусть электромагнитное поле распространяется вдоль вектора внешнего поля, так что выполняется условие $(\mathrm{E} \cdot \mathrm{n}) = 0$. Выражение для электрической индукции (4), переписанное как $\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon_c(\omega)\mathbf{E}(\omega) + ig(\omega)\mathbf{n}\times\mathbf{E}(\omega)$, можно расписать по компонентам, если волновой вектор направлен по оси *Z*: $D_x = \varepsilon_c E_x - igE_y$, $D_y = \varepsilon_c E_y + igE_z$. Если определить циркулярные компоненты электрического поля и индукции формулами $E^{(\pm)} = E_x \pm iE_y$ и $D^{(\pm)} = D_x \pm iD_y$, то циркулярные компоненты вектора индукции представляются формулами $D^{(\pm)} = (\varepsilon_c \mp g)E^{(\pm)}$. В случае плоских поперечных волн из волнового уравнения следует выражение:

$$\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{E}) = -k_0^2\mathbf{D},$$

где $k_0^2 = \omega/c$. В однородной изотропной среде волновое уравнение, выраженное в спектральных переменных, принимает вид $k^2\mathbf{E} = k_0^2\mathbf{D}$. Таким образом, имеются две поляризованные по кругу волны с огибающими напряженности электрического поля $E^{(\pm)}$, для которых закон дисперсии записывается в следующем виде: $k^2(\omega) = k_0^2[\varepsilon_c(\omega) \mp g(\omega)]$. Учитывая полученные выше результаты, дисперсионное соотношение переписывается в следующей форме:

$$k^2(\omega) = k_0^2\left(\varepsilon_b - \frac{\tilde{\omega}_p^2}{\omega^2 - \tilde{\omega}_c^2} \mp \frac{\tilde{\omega}_p^2\tilde{\omega}_c}{\omega(\omega^2 - \tilde{\omega}_c^2)}\right) = k_0^2\left(\varepsilon_b - \frac{\tilde{\omega}_p^2}{\omega(\omega \mp \tilde{\omega}_c)}\right). \qquad (6)$$

Следовательно, можно определить диэлектрическую проницаемость:

$$\varepsilon^{(\pm)}(\omega) = \left(\varepsilon_b - \frac{\tilde{\omega}_p^2}{\omega(\omega \mp \tilde{\omega}_c)}\right). \qquad (7)$$

При условии, что $\gamma << \omega << \omega_c$, выражение (7) приближенно записывается к виде $\varepsilon^{(\pm)}(\omega) \approx \pm\tilde{\omega}_p^2/(\omega\tilde{\omega}_c)$. Следовательно, распространяться может только волна циркулярной компонентой $E^{(+)}$. Эта волна известна как геликоидальная волна (геликоны) [37]. Дисперсионное соотношение для геликона можно записать в следующей форме:

$$\omega(k) = \frac{c^2\tilde{\omega}_c}{\tilde{\omega}_p^2}k^2.$$

Учитывая соотношения $\tilde{\omega}_p^2 = \omega_p^2 f$ и $\tilde{\omega}_c = \omega_c f$, следует заключить, что фазовая скорость и эффективная масса геликона не чувствуют топологического характера среды.

Из-за того, что в присутствии магнитного поля дисперсионное соотношение для плоской электромагнитной волны (6) расщепляется на две ветви, фазовые скорости различно циркулярно поляризованных волн будут различаться. Различие фазовых скоростей приведет к различию фаз у разных циркулярно поляризованных волн, что выразится в повороте плоскости поляризации волны, прошедшей некоторое расстояние в такой среде. Этот поворот плоскости поляризации известен как эффект Фарадея [38, 39].

Представим плоскую линейно поляризованную волну как суперпозицию двух циркулярно поляризованных волн. Если волна пройдет расстояние L в такой среде, то каждая из циркулярно поляризованных компонент приобретет фазовый сдвиг $\phi^{(\pm)} = k^{(\pm)}L = k_0 L\sqrt{\varepsilon^{(\pm)}}$. На выходе из среды разность фаз будет равна $\Delta\phi = k_0 L(\sqrt{\varepsilon^{(-)}} - \sqrt{\varepsilon^{(+)}})$. В оптическом диапазоне, как правило, частота несущей волны много больше как плазменной, так и циклотронной частоты: $\omega_c, \omega_p << \omega$. С учетом этого неравенства можно записать:

$$\sqrt{\varepsilon^{(\pm)}(\omega)} \approx \left(1 - \frac{\tilde{\omega}_p^2}{\omega(\omega \mp \tilde{\omega}_c)}\right)^{1/2} \approx 1 - \frac{\tilde{\omega}_p^2}{2\omega(\omega \mp \tilde{\omega}_c)}.$$

Таким образом, разность показателей преломления имеет вид:

$$\frac{\tilde{\omega}_p^2}{2\omega}\left(\frac{1}{(\omega - \tilde{\omega}_c)} - \frac{1}{(\omega + \tilde{\omega}_c)}\right) = \frac{\tilde{\omega}_p^2\tilde{\omega}_c}{\omega(\omega^2 - \tilde{\omega}_c^2)} \approx \frac{\tilde{\omega}_p^2\tilde{\omega}_c}{\omega^3}.$$

Для разности фаз циркулярно поляризованных волн отсюда имеем:

$$\Delta\varphi = \frac{\tilde{\omega}_p^2 \tilde{\omega}_c}{c\omega^3} L = \tilde{C}_V B_0 L\ .$$

Здесь введена постоянная Верде $\tilde{C}_V$, которая в данной модели может быть явно вычислена:

$$\tilde{C}_V = \frac{4\pi e^2 n_e}{c^2 m^2 \omega^3}\left(1 + \frac{e}{c}(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{B}_0)\right)^{-2}. \qquad (8)$$

Явное выражение для постоянной Верде (8) зависит от деталей рассмотренной здесь модели. Однако полученный результат указывает, что присутствие топологических характеристик материала приводит к перенормировке постоянной Верде: $C_V \to \tilde{C}_V = C_V f^2$.

4. Двойное лучепреломление

Если в (4) положить $\Omega = 0$, то вектор электрической индукции можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon_o(\omega)\mathbf{E}(\omega) + (\varepsilon_e(\omega) - \varepsilon_o(\omega))(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - i\mathbf{g}(\omega)\times\mathbf{E}(\omega),$$

где $\varepsilon_o(\omega)$ и $\varepsilon_e(\omega)$ – главные значения тензора диэлектрической проницаемости, определенные выражениями:

$$\varepsilon_o = \left(\varepsilon_b - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}\right),\ \ \varepsilon_e = \varepsilon_o - \tilde{\chi}_1(\omega)\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\ .$$

Такой вид индукции указывает на анизотропию (одноосная среда) и гиротропию среды, обусловленные вешним магнитным полем. Вектор гирации $\mathbf{g}$ определен по формуле (5) при $f = 1$.

Если $\Omega \neq 0$, то вектор электрической индукции (4) можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{D}(\omega) = \tilde{\varepsilon}_o(\omega)\mathbf{E}(\omega) + (\tilde{\varepsilon}_e(\omega) - \tilde{\varepsilon}_o(\omega))(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - i\mathbf{g}(\omega)\times\mathbf{E}(\omega)\ +$$
$$+\frac{eB_0}{c}\left[\tilde{\chi}_1(\omega)\mathbf{\Omega} + (\tilde{\varepsilon}_e(\omega) - \tilde{\varepsilon}_o(\omega))(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - i\mathbf{g}(\omega)(\mathbf{n}\times\mathbf{\Omega})\right](\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}), \qquad (9)$$

где $\tilde{\varepsilon}_o(\omega)$ и $\tilde{\varepsilon}_e(\omega)$ – модифицированные главные значения тензора диэлектрической проницаемости, определенные выражениями:

$$\varepsilon_o = \left(\varepsilon_b - \frac{\omega_p^2 f}{\omega^2 - \omega_c^2 f^2} \right), \quad \varepsilon_e = \varepsilon_o - \tilde{\chi}_1(\omega) \frac{\omega_c^2 f^2}{\omega^2}.$$

Поправки, связанные с топологическими характеристиками среды, учитываются в $\varepsilon_o(\omega)$ и $\varepsilon_e(\omega)$ фактором f. Но, кроме того, в (9) присутствует слагаемое, пропорциональное вектору кривизны Берри $\mathbf{\Omega}$. Поперечные компоненты вектора электрической индукции оказываются пропорциональными всем трем компонентам электрического поля. Это означает, что чисто продольное электрическое поле генерирует в среде поперечное поле. Выражение (9) показывает, что, меняя направление внешнего магнитного поля, можно управлять проявлением топологических характеристик среды.

Заключение

При условии, что постоянное магнитное поле, величина которого столь велика, что влиянием собственного магнитного поля электромагнитной волны можно пренебречь, определена поляризация среды, обладающей топологическими свойствами. На основе обобщенной модели Друде – Лоренца показано, что электрическая индукция распадается на две части – как бы на чисто электрическую индукцию и топологическую часть (9). Первая часть индукции учитывает топологические свойства среды через перенормировку плазменной частоты и циклотронной частоты. Помимо гиротропии она описывает наведенное магнитным полем двойное лучепреломление. Если менять ориентацию внешнего магнитного поля, то это будет равносильно изменению ориентации оптической оси направлению вектора гирации. При $(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}) = 0$ двойное лучепреломление отсутствует. Вторая часть электрической индукции пропорциональна множителю $(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})$, следовательно, может отсутствовать при условии, что магнитное поле перпендикулярно вектору электрического поля. Коэффициент пропорциональности определяется взаимной ориентацией вектора внешнего магнитного поля и вектора потока Берри. Это означает возможность управления вкладом топологических свойств в электромагнитный отклик среды.

Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-02-00921).

Список литературы

1. Naik G.V., Shalaev V.M., Boltasseva A. Alternative Plasmonic Materials: Beyond Gold and Silver // Adv. Mater. – 2013. – Vol. 25. – P. 3264–3294.

2. Naik G.V. Boltasseva A. Semiconductors for plasmonics and metamaterials // Phys. Status Solidi RRL. – 2010. – P. 1–3.

3. Applications of Hyperbolic Metamaterial Substrates / Y. Guo, W. Newman, C.L. Cortes, Z. Jacob // Adv. in Opto Electronics. – 2012. – Article ID 452502.

4. Boltasseva A., Shalaev V.M. Fabrication of optical negative-index metamaterials: Recent advances and outlook // Metamaterials. – 2008. – Vol. 2, № 1. – P. 1–7.

5. Titanium nitride nanoparticles as an alternative platform for plasmonic waveguides in the visible and telecommunication wavelength ranges / V.I. Zakomirnyi, I.L. Rasskazov, V.S. Gerasimov [et al.] // Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications. – 2018. – Vol. 30. – P. 50–56.

6. Alam M.Z., De Leon I., Boyd R.W. Large optical nonlinearity of indium tin oxide in its epsilon-near-zero region // Science. – 2016. – Vol. 352 (6287). – P. 795–797.

7. Electrodynamics of conductive oxides: Intensity-dependent anisotropy, reconstruction of the effective dielectric constant, and harmonic generation / M. Jose, J. Trull, D. Domenico de Ceglia [et al.] // Phys.Rev. A. – 2020. – Vol. 101. – P. 053828.

8. Smith D.S., Kroll N. Negative refractive index in left-handed materials // Phys.Rev.Lett. – 2000. – Vol. 85, № 14. – P. 2933–2936.

9. Веселаго В.Г. Электродинамика материалов с отрицательным коэффициентом преломления // УФН. – 2003. – Т. 173, № 7. – С. 790–794.

10. Negative index of refraction in optical metamaterials / V.M. Shalaev, W. Cai, U.K. Chettiar [et al.] // Opt.Lett. – 2005. – Vol. 30, № 24. – P. 3356–3358.

11. Pendry J.B. Negative refraction // Contemp.Phys. – 2004. – Vol. 45, № 3. – P. 191–202.

12. Monticone Fr. Alu A. Metamaterial, plasmonic and nanophotonic devices // Rep. Prog. Phys. – 2017. – Vol. 80. – P. 036401 (37pp).

13. Nanowire metamaterials with extreme optical anisotropy / J. Elser, R. Wangberg, A. Viktor, V.A. Podolskiy, E.E. Narimanov // Appl. Phys. Lett. – 2006. – Vol. 89. – 261102.

14. Drachev V.P., Podolskiy V.A., Kildishev A.V. Hyperbolic metamaterials: new physics behind a classical problem // Optics Express. – 2013. – Vol. 21, № 12. – P.15048–15064.

15. Finite-width plasmonic waveguides with hyperbolic multilayer cladding / V.E. Babicheva, M.Y. Shalaginov, S. Ishii [et al.] // Optics Express. – 2015. – Vol. 23, № 8. – P. 9681–9689.

16. Hyperbolic metamaterials and their applications / L. Ferrari, Ch. Wu, D. Lepage [et al.] // Progress in Quantum Electronics. – 2015. – Vol. 40, № 3. – P. 1–40.

17. Noginov M.A., Podolskiy V.A. (Eds) Tutorials in Metamaterials. – Boca Raton, London, New York: Taylor and Francis Group, LLC/CRC Press, 2012.

18. Сарычев А.К., Шалаев В.М. Электродинамика метаматериалов. – М.: Научный мир, 2011. – 224 с.

19. Hasan M.Z., Kane C.L. Topological insulators // Rev.Mod.Phys. – 2010. – Vol. 82, № 4. – P. 3045–3067.

20. Moore J.E. The birth of topological insulators // Nature. – 2010. – Vol. 464. – P. 194–198 (11 March 2010).

21. Hasan M.Z., Moore J.E. Three-Dimensional Topological Insulators // Annual Review of Condensed Matter Physics. – 2011. – Vol. 2. – P. 55–78.

22. Ren Y., Qiao Zh., Niu Q. Topological phases in two-dimensional materials: a review // Rep.Prog.Phys. – 2016. – Vol. 79. – P. 066501.

23. Tse W-K., MacDonald A.H. Giant Magneto-Optical Kerr Effect and Universal Faraday Effect in Thin-Film Topological Insulators // Phys.Rev. Lett. – 2010. – Vol. 105. – P. 057401.

24. Armitage N.P., Mele E.J., Vishwanath A. Weyl and Dirac semimetals in three-dimensional solids // Rev.Mod.Phys. – 2018. – Vol. 90, № 1. – P. 015001.

25. Karch A. Surface plasmons and topological insulators // Phys. Rev. B. – 2011. – Vol. 83. – P. 245432.

26. Qi J., Liu H., Xie X.C. Surface plasmon polaritons in topological insulators // Phys. Rev. B. – 2014. – Vol. 89. – P. 155420.

27. Goos–Hanchen and Imbert–Fedorov shifts at the interface of ordinary dielectric and topological insulator / F. Liu, J. Xu, G. Song [et al.] // J.Opt.Soc.Amer. B. – 2013. – Vol. 30, № 5. – P. 1167–1172.

28. Topological Imbert-Fedorov Shift in Weyl Semimetals / Q-D. Jiang, H. Jiang, H. Liu [et al.] // Phys.Rev.Lett. – 2015. – Vol. 115. – P. 156602.

29. Goos-Hanchen and Imbert-Fedorov effects in Weyl semimetals / G. Ye, W. Zhang, W. Wu [et al.] // Phys.Rev. A. – 2019. – Vol. 99. – P. 023807.

30. Karch A. Electric-Magnetic Duality and Topological Insulators // Phys.Rev.Lett. – 2009. – Vol. 103. – P. 171601.

31. Маймистов А.И., Ляшко Е.И. О спиновом моменте поверхностной волны на границе раздела гиперболического и топологического изолятора // Оптика и спектроскопия. – 2018. – Т. 125, № 6. –С. 795–799.

32. Маймистов А.И., Ляшко Е.И. Спиновый угловой момент нелинейной поверхностной волны на границе раздела обычного и топологического изолятора // Оптика и спектроскопия – 2019. – Т. 126, № 5. – С. 578–583.

33. Киттель Ч. Квантовая теория твердых тел. – М.: Наука, 1987. – 491 с.

34. Xiao D., Chang M.-Ch., Niu Q. Berry phase effects on electronic properties // Rev.Mod.Phys. – 2010. – Vol. 82. – P. 1959–2007.

35. Anomalous Hall effect / N. Nagaosa, J. Sinova, Sh. Onoda, A.H. MacDonald, N.P. Ong // Rev.Mod.Phys. – 2010. – Vol. 82. – P. 1539–1592.

36. Маймистов А.И., Ляшко Е.И. Модифицированная модель Друде – Лоренца, позволяющая учесть топологические характеристики среды // Оптика и спектроскопия. – 2019. – Т. 127, № 11. – С. 804–810.

37. Давыдов А.С. Теория твердого тела. – М.: Наука, 1976. – С. 186–190. – 639 с.

38. Ландау Л.Д., Лифщиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Физматлит, 2005. – 656 с.

39. Ахманов С.А., Никитин С.Ю. Физическая оптика. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. – 656 с.

References

1. Naik G.V., Shalaev V.M., Boltasseva A. Alternative Plasmonic Materials: Beyond Gold and Silver. *Adv. Mater.*, 2013, vol. 25, pp. 3264-3294.
2. Naik G.V. Boltasseva A. Semiconductors for plasmonics and metamaterials. // *Phys. Status Solidi RRL*, 2010, pp. 1-3.
3. Guo Y., Newman W., Cortes C.L., Jacob Z. Applications of Hyperbolic Metamaterial Substrates. *Adv. in Opto Electronics*, 2012, Article ID 452502.
4. Boltasseva A., Shalaev V.M. Fabrication of optical negative-index metamaterials: Recent advances and outlook. *Metamaterials*, 2008,vol. 2, no. 1, pp. 1-7.
5. Zakomirnyi V.I., Rasskazov I.L., Gerasimov V.S. et al. Titanium nitride nanoparticles as an alternative platform for plasmonic waveguides in the visible and telecommunication wavelength ranges. *Photonics and Nanostructures - Fundamentals and Applications*, 2018, vol. 30, pp. 50-56.
6. Alam M.Z., De Leon I., Boyd R.W. Large optical nonlinearity of indium tin oxide in its epsilon-near-zero region. *Science*, 2016, vol. 352(6287), pp. 795-797.
7. Jose M., Trull J., Domenico de Ceglia D. et al. Electrodynamics of conductive oxides: Intensity-dependent anisotropy, reconstruction of the effective dielectric constant, and harmonic generation. *Phys. Rev. A*, 2020, vol. 101, 053828 p.
8. Smith D.S., Kroll N. Negative refractive index in left-handed materials. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, vol. 85, no. 14, pp. 2933-2936.
9. Veselago V.G. Elektrodinamika materialov s otritsatel'nym koeffitsientom prelomleniia [Electrodynamics of materials with a negative refractive index]. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 2003, vol. 173, no. 7, pp. 790-794.
10. Shalaev V.M., Cai W., Chettiar U.K. et al. Negative index of refraction in optical metamaterials. *Opt. Lett.*, 2005, vol. 30, no. 24, pp. 3356-3358.
11. Pendry J.B. Negative refraction. *Contemp. Phys.*, 2004, vol. 45, no. 3, pp. 191-202.
12. Monticone Fr. Alu A. Metamaterial, plasmonic and nanophotonic devices. *Rep. Prog. Phys.*, 2017, vol. 80, 036401 p. (37pp).

13. Elser J., Wangberg R., Viktor A., Podolskiy V.A., Narimanov E.E. Nanowire metamaterials with extreme optical anisotropy. *Appl. Phys. Lett*., 2006, vol. 89, 261102.

14. Drachev V.P., Podolskiy V.A., Kildishev A.V. Hyperbolic metamaterials: new physics behind a classical problem. *Optics Express*, 2013, vol. 21, no. 12, pp. 15048-15064.

15. Babicheva V.E., Shalaginov M.Y., Ishii S. et al. Finite-width plasmonic waveguides with hyperbolic multilayer cladding. *Optics Express*, 2015, vol. 23, no. 8, pp. 9681-9689.

16. Ferrari L., Wu Ch., Lepage D. et al. Hyperbolic metamaterials and their applications. *Progress in Quantum Electronics*, 2015, vol. 40, no. 3, pp. 1-40.

17. Noginov M.A., Podolskiy V.A. (Eds) Tutorials in Metamaterials - Boca Raton, London, New York: Taylor and Francis Group, LLC/CRC Press, 2012.

18. Sarychev A.K., Shalaev V.M. Elektrodinamika metamaterialov [Electrodynamics of metamaterials]. Moscow: Nauchnyi mir, 2011, 224 p.

19. Hasan M.Z., Kane C.L. Topological insulators. *Rev. Mod. Phys*., 2010, vol. 82, no. 4, pp. 3045-3067.

20. Moore J.E. The birth of topological insulators. *Nature*, 2010, vol. 464, pp. 194-198 (11 March 2010).

21. Hasan M.Z., Moore J.E. Three-Dimensional Topological Insulators. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 2011, vol. 2, pp. 55-78.

22. Ren Y., Qiao Zh., Niu Q. Topological phases in two-dimensional materials: a review. *Rep. Prog. Phys*., 2016, vol. 79, 066501 p.

23. Tse W-K., MacDonald A.H. Giant Magneto-Optical Kerr Effect and Universal Faraday Effect in Thin-Film Topological Insulators. *Phys. Rev. Lett*., 2010, vol. 105, 057401 p.

24. Armitage N.P., Mele E.J., Vishwanath A. Weyl and Dirac semimetals in three-dimensional solids. *Rev. Mod. Phys*., 2018, vol. 90, no. 1, 015001 p.

25. Karch A. Surface plasmons and topological insulators. *Phys. Rev. B*, 2011, vol. 83, 245432 p.

26. Qi J., Liu H., Xie X.C. Surface plasmon polaritons in topological insulators. *Phys. Rev. B*, 2014, vol. 89, 155420 p.

27. Liu F., Xu J., Song G. et al. Goos-Hanchen and Imbert-Fedorov shifts at the interface of ordinary dielectric and topological insulator. *J. Opt. Soc. Amer. B*, 2013, vol. 30, no. 5, pp. 1167-1172.

28. Jiang Q-D., Jiang H., Liu H. et al. Topological Imbert-Fedorov Shift in Weyl Semimetals. *Phys. Rev. Lett.*, 2015, vol. 115, 156602 p.

29. Ye G., Zhang W., Wu W. et al. Goos-Hanchen and Imbert-Fedorov effects in Weyl semimetals. *Phys. Rev. A*, 2019, vol. 99, 023807 p.

30. Karch A. Electric-Magnetic Duality and Topological Insulators. *Phys. Rev. Lett.*, 2009, vol. 103, 171601 p.

31. Maimistov A.I., Liashko E.I. O spinovom momente poverkhnostnoi volny na granitse razdela giperbolicheskogo i topologicheskogo izoliator [On the spin moment of a surface wave at the interface between a hyperbolic and a topological insulator]. *Optika i spektroskopiia*, 2018, vol. 125, no. 6, pp. 795-799.

32. Maimistov A.I., Liashko E.I. Spinovyi uglovoi moment nelineinoi poverkhnostnoi volny na granitse razdela obychnogo i topologicheskogo izoliatora [Spin angular momentum of a nonlinear surface wave at the interface between an ordinary and a topological insulator]. *Optika i spektroskopiia*, 2019, vol. 126, no. 5, pp. 578-583.

33. Kittel' Ch. Kvantovaia teoriia tverdykh tel [Quantum theory of solids]. Moscow: Nauka,1987, 491 p.

34. Xiao D., Chang M.-Ch., Niu Q. Berry phase effects on electronic properties. *Rev. Mod. Phys*., 2010, vol. 82, pp. 1959-2007.

35. Nagaosa N., Sinova J., Onoda Sh., MacDonald A.H., Ong N.P. Anomalous Hall effect. *Rev. Mod. Phys*., 2010, vol. 82, pp. 1539-1592.

36. Maimistov A.I., Liashko E.I. Modifitsirovannaia model' Drude-Lorentsa, pozvoliaiushchaia uchest' topologicheskie kharakteristiki sredy [Modified Drude-Lorentz model allowing for the topological characteristics of the medium]. *Optika i spektroskopiia*, 2019, vol. 127, no. 11, pp. 804-810.

37. Davydov A.S. Teoriia tverdogo tela [Solid state theory]. Moscow: Nauka, 1976, pp. 186-190, 639 p. Moscow

38. Landau L.D., Lifshchits E.M. Elektrodinamika sploshnykh sred [Continuum Electrodynamics]. Moscow: Fizmatlit, 2005, 656 p.

39. Akhmanov S.A., Nikitin S.Iu. Fizicheskaia optika [Physical optics]. Moscow: Moskovskii universitet, 1998, 656 p.