

УДК 517.977.56

В.П. Первадчук, Д.Б. Владимирова, И.В. ГордееваПермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия**СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ
СИСТЕМОЙ В ЗАДАЧАХ ВЫТЯЖКИ КВАРЦЕВЫХ
ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКОН В УСЛОВИЯХ
НЕИЗОТЕРМИЧНОСТИ**

В данной работе предлагается новый подход к решению задачи оптимального стабилизирующего управления технологическим процессом вытяжки кварцевых оптических волокон. Задача оптимального управления этим процессом формулируется как задача управления распределенной системой. Сформулирована задача оптимизации геометрической формы волокна при управлении скоростью вытяжки волокна в условиях неизотермичности. С помощью аналога метода Лагранжа получены система оптимальности в форме дифференциальной задачи в частных производных, а также формула для нахождения функции оптимального управления в явном виде. Для получения системы оптимальности использованы свойства выпуклости, полунепрерывности снизу и коэрцитивности целевого функционала.

Ключевые слова: оптимальное стабилизирующее управление, распределенные системы, оптическое волокно, вытяжка, система оптимальности.

V.P. Pervadchuk, D.B. Vladimirova, I.V. Gordeeva

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

**STABILIZING CONTROL OF DISTRIBUTED SYSTEM
IN THE PROBLEMS OF QUARTZ OPTICAL FIBER DRAWING
UNDER NON-ISOTHERMAL CONDITIONS**

In this paper a new approach to solving the problem of optimal stabilizing control of the technological quartz optical fiber drawing process is proposed. The optimal control problem for this process is formulated as a distributed system control problem. The problem of optimizing the geometric shape of the fiber when controlling the speed of winding the resulted fiber under non-isothermal conditions is formulated. Using an analog of the Lagrange method, an optimality system is obtained in the form of a partial differential problem. An explicit form formula for finding the optimal control function is obtained also. To obtain the optimality system, the properties of convexity, lower semicontinuity, and coercivity of the objective functional are used.

Keywords: optimal stabilizing control, distributed systems, optical fiber, drawing, optimality system.

Введение

В последние годы теория систем управления в большей степени занимается решением задач, связанными с проблемами оптимизации. Большая часть таких задач связана с системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями, так называемыми системами с сосредоточенными параметрами. В последние же десятилетия значительный интерес проявился к оптимизации систем, описываемых уравнениями в частных производных, которые называются системами с распределенными параметрами или распределенными системами. В данной работе рассматривается задача, связанная с системой с распределенными параметрами.

Первыми основополагающими работами в области теории оптимального управления для систем с распределенными параметрами были разработки А.Г. Бутковского и А.Я. Лернера в 1960 г. С тех пор А.Г. Бутковский вносил постоянный вклад в развитие теории оптимального управления [1, 2]. Подход, используемый в большей части этих работ, основан на расширении принципа максимума Понтрягина. Р.К.С. Wang [3, 4] разработал необходимые условия для оптимального управления системами с распределенными параметрами с использованием формализации динамического программирования. В своих работах Р.К.С. Wang также обсуждает такие понятия, как стабильность, управляемость, наблюдаемость распределенных систем, а также методы аппроксимации и инструменты, применяемые при решении задач с такого рода системами. Другими исследователями данной области являются W.L. Brogan, Ю.В. Егоров, Y. Sakawa и Axelband [5–8], каждый из которых в своих работах рассматривает решение определенных классов задач с помощью различных методов.

Существенным недостатком вышеперечисленных теоретических работ является отсутствие результатов практических вычислений. Главной причиной этого, несомненно, является трудность, связанная с вычислениями в такого рода задачах.

При оптимизации систем с распределенными параметрами возникают два типа задач, а именно: 1) задачи распределенного управления и 2) задачи граничного управления. В первом случае управление распространяется по всей пространственной области, а во втором – только по граничной области. В данной статье представлена задача с граничным типом управления.

Некоторыми примерами систем с распределенными параметрами являются печи непрерывного действия, системы передачи электроэнергии и космические летательные аппараты, возвращающиеся в атмосферу Земли и др.

Постановка задачи

Появление и стремительный прогресс волоконно-оптических технологий приходится на вторую половину XX в. За последние десятилетия оптические волокна находятся среди наиболее эффективных и удобных методов передачи сигналов в различных системах. Например, в системе телевидения оптические волокна используются для передачи цифровых видеосигналов. Также для передачи большого количества данных предпочитают использовать волоконно-оптическую технологию в компьютерных и информационных сетях, так как оптическое волокно имеет меньший вес по сравнению с другими системами передачи информации, способно выдерживать удары молнии, быстрее переносить большее количество информации на дальние расстояния. Вооруженные силы используют волоконную оптику для улучшения связи и тактических систем.

Оптические волокна изготавливаются посредством процесса вытяжки, который относится к формированию оптического волокна из цилиндрического стеклянного стержня, называемого преформой.

Как показано на рис. 1, заготовка начальным радиусом R_0 постепенно подается в цилиндрическую печь и нагревается по периферии до температуры размягчения. При этой температуре заготовка переходит в вязко-текучее состояние, и к ее кончику прикладывается сила натяжения для вытягивания расплава кварца вниз, что приводит к образованию шейки на заготовке. Поскольку расплав кварца вытягивается вниз с относительно высокой скоростью, то ниже по потоку получается стекловолокно нужного радиуса. При выходе волокна

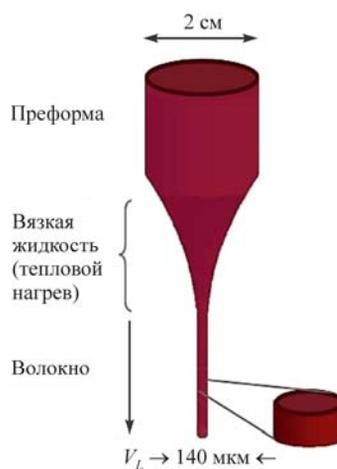


Рис. 1. Общая схема вытяжки оптического волокна

из печи оно охлаждается до температуры окружающей среды. В процессе вытяжки диаметр волокна может демонстрировать значительные колебания из-за нестационарных изменений скорости подачи заготовки, скорости намотки волокна, температуры печи и/или механических вибраций механизма намотки готового волокна. В нашей работе предложен подход оптимального стабилизирующего управления процессом вытяжки оптического волокна. В целях оптимизации производственного процесса вытяжки важно и актуально осуществлять управление рядом параметров в режиме реального времени. К числу таких параметров можно отнести температуру печи и скорость намотки готового волокна. При этом важно, чтобы другие параметры процесса (например, его геометрические характеристики) были стабильными.

В одномерном приближении технологический процесс вытяжки в неизотермических условиях описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных [9]:

$$\left\{ \begin{aligned} & -\frac{\partial R(t, z)}{\partial t} = V(t, z) \frac{\partial R(t, z)}{\partial z} + \frac{R(t, z)}{2} \frac{\partial V(t, z)}{\partial z}, \\ & R^2(t, z) \left(\frac{\partial V(t, z)}{\partial t} + V(t, z) \frac{\partial V(t, z)}{\partial z} \right) = \\ & = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial z} \left(3\mu R^2(t, z) \frac{\partial V(t, z)}{\partial z} \right) + \frac{R^2(t, z)}{\text{Fr}} + \frac{1}{\text{We}} \frac{\partial R(t, z)}{\partial z}, \\ & R^2(t, z) \left(\frac{\partial T(t, z)}{\partial t} + V(t, z) \frac{\partial T(t, z)}{\partial z} \right) = \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda R^2(t, z) \frac{\partial T(t, z)}{\partial z} \right) - \\ & - 2R(t, z) (1 + R^2(t, z))^{1/2} \text{St}(T(t, z) - 1) + 4\chi R(t, z) R_p \times \\ & \times (R_p - R(t, z)) \int_0^1 \frac{(\beta \varepsilon_p T_p^4 - \varepsilon T^4(t, z))(R_p - R(t, z) + kR'(t, z)(z - \eta))}{((\eta - z)^2 + (R_p - R(t, z))^2)^2} d\eta, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями следующего вида:

$$\left\{ \begin{aligned} & R|_{t=0} = R_s(z), \quad R|_{z=0} = R_0(t), \\ & V|_{t=0} = V_s(z), \quad V|_{z=0} = V_0(t), \quad V|_{z=L} = V_L(t), \\ & T|_{t=0} = T_s(z), \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad T|_{z=L} = T_L(t), \end{aligned} \right. \quad (2)$$

здесь t – время; z – продольная координата; $R(t, z)$, $V(t, z)$ и $T(t, z)$ – скорость, радиус и температура струи расплава кварца соответственно; ρ – плотность расплава кварца; μ – вязкость расплава кварца, определяемая в неизотермическом случае функцией температуры T , аппроксимирующая зависимость вязкости, следует из закона Аррениуса [10], $\mu(T) = \mu_0 \exp\left(\frac{A}{R_g T}\right)$, где μ_0, A – числовые коэффициенты,

R_g – универсальная газовая постоянная; Re, Fr, We, Pe, St – числа Рейнольдса, Фруда, Вебера, Пекле и Стэнтона соответственно; λ – коэффициент теплопроводности стекла; $\chi = \frac{n_c^2 \sigma_0 T_0^3}{c \rho V^*}$ (где n_c – показатель

преломления газа, продуваемого через зону нагрева; σ_0 – постоянная Стефана-Больцмана; T_0 – температура газа, продуваемого через зону нагрева; c – теплоемкость расплава кварца; V^* – скорость вытяжки готового волокна); R_p – радиус нагревательного элемента; β – коэффициент отражения; $\varepsilon, \varepsilon_p$ – степени черноты нагревательного элемента и расплава; T_p – температура печи; η – переменная интегрирования; k –

весовой множитель, $k = \begin{cases} -1, & \text{если } R' > 0, \\ 1, & \text{если } R' < 0, \end{cases} \quad R' = \partial R / \partial z$; L – длина изу-

чаемого отрезка вытяжки; $R_0(t)$ – радиус кварцевой заготовки; $R_s(z), V_s(z), T_s(z)$ – функции, соответствующие начальному состоянию системы; $V_0(t)$ и $V_L(t)$ – скорости подачи заготовки и вытяжки волокна соответственно; $T_L(t)$ – температура готового волокна.

В реальных условиях управление радиусом волокна осуществляется регулированием скорости вытяжки волокна. В идеальном случае в неизотермических условиях постоянство геометрии готового волокна может быть получено при стационарном режиме вытяжки, т.е. при постоянстве скоростей подачи заготовки и вытяжки волокна, а также неизменности тепловых воздействий на систему. Таким образом, в рамках данной постановки задачи в качестве управления будет выступать скорость вытяжки волокна, т.е. функция $V(t, L)$. Введем обозначение: $u(t) = V(t, L)$. Движение системы при конкретных значениях скоростей

и температур будем называть программным движением, а соответствующее ему управление – программным управлением. Однако реальное (фактическое) движение системы всегда будет отличаться от программного по ряду причин, поэтому реальные значения радиуса струи $R(t, z)$, скорости материала $V(t, z)$, температуры расплава $T(t, z)$ и управления $u(t)$ будут описываться следующими функциями:

$$R(t, z) = R_{st}(z)(1 + \tilde{R}(t, z)), \quad (3)$$

$$V(t, z) = V_{st}(z)(1 + \tilde{V}(t, z)), \quad (4)$$

$$T(t, z) = T_{st}(z)(1 + \tilde{T}(t, z)), \quad (5)$$

$$u(t) = u_{st}(1 + \tilde{u}(t)), \quad (6)$$

где $R_{st}(z)$, $V_{st}(z)$, $T_{st}(z)$ – программное стационарное движение; u_{st} – программное управление, соответствующее скорости вытяжки $V(L)$ в стационарном режиме; $\tilde{R}(t, z)$, $\tilde{V}(t, z)$, $\tilde{T}(t, z)$ – отклонения (возмущения) фактического движения от программного; $\tilde{u}(t)$ – отклонение реального управления от программного. Реализация соотношений (3)–(6) в задаче (1), (2) с учетом только лишь составляющих, находящихся в первых степенях, приводит к линейной постановке вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial t} = V_{st} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial z} + \frac{V_{st}}{2} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = \frac{3\mu}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial z^2} + \beta_1(z) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} + \beta_2(z) \tilde{V} + \alpha_1(z) \frac{\partial \tilde{R}}{\partial z} + \\ + \alpha_2(z) \tilde{R} + \varphi_1(z) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \varphi_2(z) \tilde{T}, \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \frac{\lambda}{\text{Pe}} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} + \varphi_3(z) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \varphi_4(z) \tilde{T} + \\ + \alpha_3(z) \frac{\partial \tilde{R}}{\partial z} + \alpha_4(z) \tilde{R} + \beta_3(z) \tilde{V}, \\ \tilde{R}|_{t=0} = R_s(z), \quad \tilde{R}|_{z=0} = R_0(t), \\ \tilde{V}|_{t=0} = V_s(z), \quad \tilde{V}|_{z=0} = V_0(t), \quad \tilde{V}|_{z=L} = \tilde{u}(t), \\ \tilde{T}|_{t=0} = T_s(z), \quad \tilde{T}|_{z=0} = T_0(t), \quad \tilde{T}|_{z=L} = T_L(t). \end{array} \right. \quad (7)$$

Здесь коэффициенты $\alpha_1(z)$, $\alpha_2(z)$, $\alpha_3(z)$, $\beta_1(z)$, $\beta_2(z)$, $\beta_3(z)$, $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, $\varphi_4(z)$ зависят от стационарных решений $R_{st}(z)$, $V_{st}(z)$, $T_{st}(z)$.

Таким образом, полученная начально-краевая задача (7) имеет состояния, значения которых можно трактовать как отклонения (в долях) от стационарных программных значений состояний исходной системы (1), (2). Сформулируем задачу оптимального управления с учетом линеаризации исходной модели и дальнейшего перехода к исследованию величин отклонений фактического движения от программного. Определим целевой функционал интегрального типа (8), явно зависящий от функции управления и обладающий свойством коэрцитивности, что позволит в дальнейшем использовать технику получения оптимизационной системы и определить функцию оптимального управления в явном виде.

Отметим, что функционал, определенный (8), представляет смешанный интегральный критерий с подынтегральной функцией, дающей отклонения по фазовым координатам в среднем (первое слагаемое) и определяющей общие энергетические затраты (второе слагаемое). Здесь α_0 – положительный числовой параметр (цена управления), который оценивается заранее либо подбирается из решений тестовых задач, $\alpha = \alpha_0 (V(L))^2$.

$$\begin{aligned}
 F(\tilde{u}) &= \int_0^\tau \int_0^L \left(R_{st}(L) \tilde{R}(t, L) \right)^2 dz dt + \alpha_0 \int_0^\tau \left(\tilde{u}(t) \cdot V(L) \right)^2 dt = \\
 &= \int_0^\tau \int_0^L \left(R_{st}(L) \tilde{R}(t, L) \right)^2 dz dt + \alpha \int_0^\tau \left(\tilde{u}(t) \right)^2 dt \rightarrow \inf.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Оптимизационная система

Необходимые условия существования решения как исходной оптимизационной задачи, так и задачи (7), полученной в результате линеаризации, называются системой оптимальности или оптимизационной системой.

Вопросы существования решений задач оптимизации для параболических систем с целевыми функционалами в специальных формах обсуждались в [11, 12, 13, 14]. Отметим, что важными свойствами

функционала (8) при этом являются свойства выпуклости, полунепрерывности снизу и коэрцитивности. В этом случае можно говорить о существовании, по крайней мере, одной функции $\tilde{u}_0(t)$, называемой оптимальным элементом, на которой функционал будет достигать своей точной нижней грани:

$$F(\tilde{u}_0) = \inf_{\tilde{u} \in U} F(\tilde{u}(t)), \quad (9)$$

здесь $U = L_2[0; \tau]$.

Поскольку функция управления $\tilde{u}(t)$ входит в дифференциальную задачу (7) линейно, то можно говорить о некоторых линейных операторах Λ_i , действующих на U , со значениями в пространстве состояний $\Omega_i = [0; L] \times [0; \tau]$, причем $\Lambda_i(\tilde{u}(t)) = G_i(t, z)$, где $G_i(t, z) = \{\tilde{R}(t, z), \tilde{V}(t, z), \tilde{T}(t, z)\}$, $i = 1, 2, 3$. Заметим, что в силу линейности Λ_i его дифференциал Гато (первая вариация отображения) на приращении $\delta\tilde{u}$ совпадает со значением самого оператора, поскольку

$$d\Lambda(\tilde{u}, \delta\tilde{u}) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Lambda(\tilde{u} + \xi\delta\tilde{u}) - \Lambda(\tilde{u})}{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Lambda(\tilde{u}) + \xi\Lambda(\delta\tilde{u}) - \Lambda(\tilde{u})}{\xi} = \Lambda(\delta\tilde{u}). \quad (10)$$

Введем обозначения:

$$\dot{\tilde{R}}(t, z) = \Lambda_1(\delta\tilde{u}_0), \quad \dot{\tilde{V}}(t, z) = \Lambda_2(\delta\tilde{u}_0), \quad \dot{\tilde{T}}(t, z) = \Lambda_3(\delta\tilde{u}_0). \quad (11)$$

Величины $\dot{\tilde{R}}(t, z)$, $\dot{\tilde{V}}(t, z)$, $\dot{\tilde{T}}(t, z)$ будем называть сопряженными состояниями к состояниям системы $\tilde{R}(t, z)$, $\tilde{V}(t, z)$, $\tilde{T}(t, z)$.

Согласно критерию оптимальности [11, 12, 14] значение дифференциала Гато на оптимальном элементе \tilde{u}_0 обратится в ноль, таким образом:

$$\int_0^\tau \Lambda_1 \tilde{u}_0 \Lambda(\delta\tilde{u}_0) dt + \alpha \int_0^\tau \tilde{u}_0(\delta\tilde{u}_0) dt = 0. \quad (12)$$

Проварьируем исходную дифференциальную задачу (7) [15, 16] и получим дифференциальную задачу относительно функций сопряженного состояния следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 -\frac{\partial \dot{R}}{\partial t} = V_{st} \frac{\partial \dot{R}}{\partial z} + \frac{V_{st}}{2} \frac{\partial \dot{V}}{\partial z}, \\
 \dot{R} \Big|_{t=0} = 0, \quad \dot{R} \Big|_{z=0} = 0, \\
 \frac{\partial \dot{V}}{\partial t} = \frac{3\mu}{Re} \frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial z^2} + \beta_1(z) \frac{\partial \dot{V}}{\partial z} + \beta_2(z) \dot{V} + \alpha_1(z) \frac{\partial \dot{R}}{\partial z} + \\
 + \alpha_2(z) \dot{R} + \varphi_1(z) \frac{\partial \dot{T}}{\partial z} + \varphi_2(z) \dot{T}, \\
 \dot{V} \Big|_{t=0} = 0, \quad \dot{V} \Big|_{z=0} = 0, \quad \dot{V} \Big|_{z=L} = \delta \tilde{u}_0, \\
 \frac{\partial \dot{T}}{\partial t} = \frac{\lambda}{Pe} \frac{\partial^2 \dot{T}}{\partial z^2} + \varphi_3(z) \frac{\partial \dot{T}}{\partial z} + \varphi_4(z) \dot{T} + \alpha_3(z) \frac{\partial \dot{R}}{\partial z} + \alpha_4(z) \dot{R} + \beta_3(z) \dot{V}, \\
 \dot{T} \Big|_{t=0} = 0, \quad \dot{T} \Big|_{z=0} = 0, \quad \dot{T} \Big|_{z=L} = 0.
 \end{array} \right. \quad (13)$$

Умножим уравнение неразрывности из (13) на произвольную функцию $q(t, z) \in L_2(\Omega_t)$, уравнение движения – на произвольную функцию $p(t, z) \in L_2(\Omega_t)$, а уравнение энергии – на произвольную функцию $s(t, z) \in L_2(\Omega_t)$. Проинтегрируем все три уравнения по области Ω_t . Результатом их сложения будет являться следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 & -\int_0^{\tau} \int_0^L \frac{\partial \dot{R}}{\partial t} q dz dt + \int_0^{\tau} \int_0^L \frac{\partial \dot{V}}{\partial t} p dz dt + \int_0^{\tau} \int_0^L \frac{\partial \dot{T}}{\partial t} s dz dt = \int_0^{\tau} \int_0^L V_{st} \frac{\partial \dot{R}}{\partial z} q dz dt + \\
 & + \int_0^{\tau} \int_0^L \frac{V_{st}}{2} \frac{\partial \dot{V}}{\partial z} q dz dt + \frac{3\mu}{Re} \int_0^{\tau} \int_0^L \frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial z^2} p dz dt + \int_0^{\tau} \int_0^L \beta_1(z) \frac{\partial \dot{V}}{\partial z} p dz dt + \\
 & + \int_0^{\tau} \int_0^L \beta_2(z) \dot{V} p dz dt + \int_0^{\tau} \int_0^L \alpha_1(z) \frac{\partial \dot{R}}{\partial z} p dz dt + \int_0^{\tau} \int_0^L \alpha_2(z) \dot{R} p dz dt + \\
 & + \int_0^{\tau} \int_0^L \varphi_1(z) \frac{\partial \dot{T}}{\partial z} p dz dt + \int_0^{\tau} \int_0^L \varphi_2(z) \dot{T} p dz dt + \frac{\lambda}{Pe} \int_0^{\tau} \int_0^L \frac{\partial^2 \dot{T}}{\partial z^2} s dz dt +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^\tau \int_0^L \varphi_3(z) \frac{\partial \dot{T}}{\partial z} s dz dt + \int_0^\tau \int_0^L \varphi_4(z) \dot{T} s dz dt + \int_0^\tau \int_0^L \alpha_3(z) \frac{\partial \dot{R}}{\partial z} s dz dt + \\
 & + \int_0^\tau \int_0^L \alpha_4(z) \dot{R} s dz dt + \int_0^\tau \int_0^L \beta_3(z) \dot{V} s dz dt.
 \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой Грина для слагаемых, содержащих производные функций \dot{R} , \dot{V} и \dot{T} . Получим:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\tau \int_0^L \dot{R} \frac{\partial q}{\partial t} dz dt - \int_0^\tau \dot{R} q \Big|_0^L dz - \int_0^\tau \int_0^L \dot{V} \frac{\partial p}{\partial t} dz dt + \\
 & + \int_0^\tau \dot{V} p \Big|_0^L dz - \int_0^\tau \int_0^L \dot{T} \frac{\partial s}{\partial t} dz dt + \int_0^\tau \dot{T} s \Big|_0^L dz = \\
 & = - \int_0^\tau \int_0^L \dot{R} \frac{\partial (V_{st} q)}{\partial z} dz dt + \int_0^\tau \dot{R} V_{st} q \Big|_0^L dt - \\
 & - \int_0^\tau \int_0^L \dot{V} \frac{\partial \left(\frac{V_{st}}{2} q \right)}{\partial z} dz dt + \int_0^\tau \dot{V} \frac{V_{st}}{2} q \Big|_0^L dt + \\
 & + \frac{3\mu}{\text{Re}} \int_0^\tau \int_0^L \dot{V} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} dz dt + \frac{3\mu}{\text{Re}} \int_0^\tau \frac{\partial \dot{V}}{\partial z} p \Big|_0^L dt - \frac{3\mu}{\text{Re}} \int_0^\tau \dot{V} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_0^L dt - \\
 & - \int_0^\tau \int_0^L \dot{V} \frac{\partial (\beta_1(z) p)}{\partial z} dz dt + \int_0^\tau \dot{V} \beta_1(z) p \Big|_0^L dt + \int_0^\tau \int_0^L \beta_2(z) \dot{V} p dz dt - \\
 & - \int_0^\tau \int_0^L \dot{R} \frac{\partial (\alpha_1(z) p)}{\partial z} dz dt + \int_0^\tau \dot{R} \alpha_1(z) p \Big|_0^L dt + \int_0^\tau \int_0^L \alpha_2(z) \dot{R} p dz dt - \\
 & - \int_0^\tau \int_0^L \dot{T} \frac{\partial (\varphi_1(z) p)}{\partial z} dz dt + \int_0^\tau \dot{T} \varphi_1(z) p \Big|_0^L dt + \int_0^\tau \int_0^L \varphi_2(z) \dot{T} p dz dt + \\
 & + \frac{\lambda}{\text{Pe}} \int_0^\tau \int_0^L \dot{T} \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} dz dt + \frac{\lambda}{\text{Pe}} \int_0^\tau \frac{\partial \dot{T}}{\partial z} s \Big|_0^L dt - \frac{\lambda}{\text{Pe}} \int_0^\tau \dot{T} \frac{\partial s}{\partial z} \Big|_0^L dt -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^\tau \int_0^L \dot{T} \frac{\partial(\varphi_3(z)s)}{\partial z} dz dt + \int_0^\tau \dot{T} \varphi_3(z)s \Big|_0^L dt + \int_0^\tau \int_0^L \dot{T} \varphi_4(z) s dz dt - \\
 & - \int_0^\tau \int_0^L \dot{R} \frac{\partial(\alpha_3 s)}{\partial z} dz dt + \int_0^\tau \dot{R} \alpha_3 s \Big|_0^L dt + \int_0^\tau \int_0^L \dot{R} \alpha_4(z) s dz dt + \int_0^\tau \int_0^L \dot{V} \beta_3(z) s dz dt.
 \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы функции $q(t, z)$, $p(t, z)$ и $s(t, z)$ удовлетворяли следующей дифференциальной задаче:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (V_{st} q + \alpha_1(z)p + \alpha_3(z)s) - \alpha_2(z)p - \alpha_4(z)s = R_{st}^2 \tilde{R}, \\
 & q|_{t=\tau} = 0, \quad q|_{z=L} = 0, \\
 & - \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{3\mu_0}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V_{st}}{2} q + \beta_1(z)p \right) - \beta_2(z)p - \beta_3(z)s = 0, \\
 & p|_{t=\tau} = 0, \quad p|_{z=0} = 0, \quad p|_{z=L} = 0, \\
 & - \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\lambda}{\text{Pe}} \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_1(z)p + \varphi_3(z)s) - \varphi_2(z)p - \varphi_4(z)s = 0, \\
 & s|_{t=\tau} = 0, \quad s|_{z=0} = 0, \quad s|_{z=L} = 0.
 \end{aligned} \right. \quad (14)$$

Тогда с учетом (13) и (14) последнее интегральное соотношение примет вид:

$$\int_0^\tau \int_0^L \dot{R} R_{st}^2 \tilde{R} dz dt = \int_0^\tau \delta \tilde{u}_0 \left(- \frac{3\mu}{\text{Re}} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \Big|_{z=L} dt.$$

Принимая во внимание соотношение (10), получим:

$$\alpha \int_0^\tau \tilde{u}_0 \delta \tilde{u}_0 dt = \frac{3\mu}{\text{Re}} \int_0^\tau \delta \tilde{u}_0 \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=L} dt,$$

откуда следует, что

$$\tilde{u}_0(t) = \frac{3\mu}{\alpha \text{Re}} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=L}.$$

Окончательно система оптимальности примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 -\frac{\partial \tilde{R}}{\partial t} = V_{st} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial z} + \frac{V_{st}}{2} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z}, \\
 \tilde{R}|_{t=0} = R_s(z), \tilde{R}|_{z=0} = R_0(t), \\
 \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = \frac{3\mu}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial z^2} + \beta_1(z) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} + \beta_2(z) \tilde{V} + \alpha_1(z) \frac{\partial \tilde{R}}{\partial z} + \\
 + \alpha_2(z) \tilde{R} + \varphi_1(z) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \varphi_2(z) \tilde{T}, \\
 \tilde{V}|_{t=0} = V_s(z), \tilde{V}|_{z=0} = V_0(t), \tilde{V}|_{z=L} = \frac{3\mu}{\alpha \text{Re}} \frac{\partial p}{\partial z}, \\
 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \frac{\lambda}{\text{Pe}} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} + \varphi_3(z) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \varphi_4(z) \tilde{T} + \alpha_3(z) \frac{\partial \tilde{R}}{\partial z} + \alpha_4(z) \tilde{R} + \beta_3(z) \tilde{V}, \\
 \tilde{T}|_{t=0} = T_s(z), \tilde{T}|_{z=0} = T_0(t), \tilde{T}|_{z=L} = T_L(t), \\
 \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (V_{st} q + \alpha_1(z) p + \alpha_3(z) s) - \alpha_2(z) p - \alpha_4(z) s = R_{st}^2 \tilde{R}, \\
 q|_{t=\tau} = 0, q|_{z=L} = 0, \\
 -\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{3\mu}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V_{st}}{2} q + \beta_1(z) p \right) - \beta_2(z) p - \beta_3(z) s = 0, \\
 p|_{t=\tau} = 0, p|_{z=0} = 0, p|_{z=L} = 0, \\
 -\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\lambda}{\text{Pe}} \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_1(z) p + \varphi_3(z) s) - \varphi_2(z) p - \varphi_4(z) s = 0, \\
 s|_{t=\tau} = 0, s|_{z=0} = 0, s|_{z=L} = 0.
 \end{array} \right. \quad (15)$$

Заключение

Таким образом, в работе сформулирована и обоснована задача оптимального стабилизирующего управления процессом вытяжки в неизотермических условиях. Для линеаризованной системы, описывающей возмущенное движение, показана разрешимость задачи, а также получена система оптимальности. Функция оптимального стабилизирующего управления получена в явном виде.

Дальнейшая работа непосредственно связана с поиском решения системы оптимальности. Решение системы оптимальности предполагается искать с помощью численных методов. В результате решения этой

системы будет найдена функция оптимального стабилизирующего управления, которая в данном случае представляет собой скорость намотки готового волокна.

Авторы считают, что данная задача оптимального стабилизирующего управления процессом вытяжки оптических волокон представляет большой интерес, а также является актуальной в связи с тем, что данная задача позволяет повысить качество волокна, тем самым оптимизируя процесс производства оптических волокон.

Список литературы

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1965. – 476 с.
2. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
3. Wang P.K.C. Control of Distributed Parameter Systems; in: *Advances in Control Systems 1*. – New York and London: Academic Press, 1964.
4. Wang P.K.C., Tung F. Optimum Control of Distributed Parameter Systems // *Joint Automatic Control Conference, University of Minnesota, Minneapolis*. – 1963. – P. 16–31.
5. Brogan W.L. Optimal Control Theory Applied to Systems Described by Partial Differential Equations. Ph.D. Dept. of Engineering, University of California. – Los Angeles, 1965.
6. Егоров А.И. Основы теории управления. – М.: Физматлит, 2004. – 504 с.
7. Sakawa Y. Optimal Control of a Certain Type of Linear Distributed Parameter Systems // *IEEE Trans, on Automatic Control*. – 1966. – Vol. AC–11. – P. 35–41.
8. Axelband, Elliot I. The Optimal Control of Certain Classes of Linear Distributed Parameter Systems, Ph.D. Dept. of Engineering, University of California. – Los Angeles, 1966.
9. Васильев В.Н., Дульнев Г.Н., Наумчик В.Д. Нестационарные процессы при формировании оптического волокна 1. Устойчивость процесса вытяжки // *Инж.-физ. журнал*. – 1988. – Т. 55, № 2. – С. 284–292.
10. Gospodinow P., Yarin A.L. Draw resonance of optical microcapillaries in non-isothermal drawing // *Int. J. Multiphase Flow*. – 1999. – Vol. 23, no. 5. – P. 967–976.

11. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. – Новосибирск: Научная книга, 1999. – 350 с.

12. Шумкова Д.Б. Оптимальное управление распределенными системами в экономике и технике: учеб.-метод. пособие. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. – 132 с.

13. Экланд И., Тهماм Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979. – 400 с.

14. Шумкова Д.Б. Оптимальное управление в задачах с неизвестными границами и подвижными источниками: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2006. – 111 с.

15. Первадчук В.П., Шумкова Д.Б. Оптимальное управление в задачах с подвижным тепловым источником // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2010. – № 2(98). – С. 37–44.

16. Pervadchuk V., Vladimirova D., Gordeeva I. Optimal control of distributed systems in problems of quartz optical fiber production // 6th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA 2017); 15–18 August 2017 Budapest, Hungary: [proceedings] / Amer. Inst. of Physics (AIP). – New York: AIP Publishing, 2018 – Art. 0200036. – (AIP Conference Proceedings; vol. 1926). – URL: <https://doi.org/10.1063/1.5020485>.

References

1. Butkovskii A.G. Teoriia optimalnogo upravleniia sistemami s raspredelennymi parametrami [Theory of optimal control of systems with distributed parameters]. Moscow, Nauka, 1965, 476 p.

2. Butkovskii A.G. Metody upravleniia sistemami s raspredelennymi parametrami [Distributed Parameter Management Methods]. Nauka, 1975, 568 p.

3. Wang P.K.C. Control of distributed parameter systems. *Advances in Control Systems 1*. New York, London, Academic Press, 1964.

4. Wang P.K.C., Tung F. Optimum control of distributed parameter systems. *Joint Automatic Control Conference, University of Minnesota, Minneapolis*, 1963, pp. 16-31.

5. Brogan W.L. Optimal control theory applied to systems described by partial differential equations. Ph.D. Los Angeles, 1965.

6. Egorov A.I. Osnovy teorii upravleniia [Fundamentals of Control Theory]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 504 p.

7. Sakawa Y. Optimal control of a certain type of linear distributed parameter systems. *IEEE Trans, on Automatic Control*, 1966, vol. AC-11, pp. 35-41.

8. Axelband E.I. The optimal control of certain classes of linear distributed parameter systems. Ph.D. Los Angeles, 1966.

9. Vasilev V.N., Dulnev G.N., Naumchik V.D. Nestatsionarnye protsessy pri formirovanii opticheskogo volokna 1. ustoichivost protsessa vyitazhki [Non-stationary processes during the formation of optical fiber 1. Stability of the drawing process]. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*, 1988, vol. 55, no. 2, pp. 284-292.

10. Gospodinov P., Yarin A.L. Draw resonance of optical microcapillaries in non-isothermal drawing. *Int. J. Multiphase Flow*, 1999, vol. 23, no. 5, pp. 967-976.

11. Fursikov A.V. Optimalnoe upravlenie raspredelennymi sistemami. teoriia i prilozheniia [Optimal control of distributed systems. Theory and Applications]. Novosibirsk, Nauchnaia kniga, 1999, 350 p.

12. Shumkova D.B. Optimalnoe upravlenie raspredelennymi sistemami v ekonomike i tekhnike [Optimal control of distributed systems in economics and technology]. Perm, Izdatelstvo Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2009, 132 p.

13. Eklund I., Temam R. Vypuklyi analiz i variatsionnye problemy [Convex analysis and variational problems]. Moscow, Mir, 1979, 400 p.

14. Shumkova D.B. Optimalnoe upravlenie v zadachakh s neizvestnymi granitsami i podvizhnymi istochnikami [Optimal control in problems with unknown boundaries and moving sources]. Ph. D. thesis. Perm, 2006, 111 p.

15. Pervadchuk V.P., Shumkova D.B. Optimalnoe upravlenie v zadachakh s podvizhnym teplovym istochnikom [Optimal control in problems with a moving heat source]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU*, 2010, no. 2(98), pp. 37-44.

16. Pervadchuk V., Vladimirova D., Gordeeva I. Optimal control of distributed systems in problems of quartz optical fiber production. *6th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA 2017)*. New York, AIP Publishing, 2018, Art. 0200036, available at: <https://doi.org/10.1063/1.5020485> (accessed 1 September 2019).